Série A, n° 191
N° d'ordre :
215

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

Titre

LE ~~GRADE~~ DE DOCTEUR D'UNIVERSITÉ

PAR

M. R. LEDUC

1re THÈSE

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES POUTRES PRISMATIQUES

2e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le 14 juin 1929, devant la Commission d'Examen

Jury. . . MM. KŒNIGS *Président*
VILLAT
VILLEY *Examinateurs*

Série A, n° 191
N° d'ordre :
215

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

Titre
LE ~~GRADE~~ DE DOCTEUR D'UNIVERSITÉ

PAR

M. R. LEDUC

1re THÈSE

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES POUTRES PRISMATIQUES

2e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le 14 juin 1929, devant la Commission d'Examen

Jury. . . .	MM. KŒNIGS	*Président*
	VILLAT	*Examinateurs*
	VILLEY	

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen	C. MAURAIN *Professeur*	Physique du globe.
Doyens honoraires	P. APPELL, M. MOLLIARD.	
Professeurs honoraires	A. JOANNIS.	
	H. LE CHATELIER.	
	H. LEBESGUE.	
	A. FERNBACH.	
	A. LEDUC.	
	R. DONGIER.	
	E. HÉROUARD.	
Professeurs	ÉMILE PICARD	Analyse supérieure et algèbre supérieure.
	G. KŒNIGS	Mécanique physique et expérimentale.
	E. GOURSAT	Calcul différentiel et calcul intégral.
	P. JANET	Électrotechnique générale.
	F. WALLERANT	Minéralogie.
	H. ANDOYER	Astronomie.
	P. PAINLEVÉ	Mécanique analytique et mécanique céleste.
	Gabriel BERTRAND	Chimie biologique.
	Mme P. CURIE	Physique générale et radioactivité.
	M. CAULLERY	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
	G. URBAIN	Chimie générale.
	Émile BOREL	Calcul des probabilités et Physique mathém.
	L. MARCHIS	Aviation.
	Jean PERRIN	Chimie physique.
	Rémy PERRIER	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
	H. ABRAHAM	Physique.
	M. MOLLIARD	Physiologie végétale.
	E. CARTAN	Géométrie supérieure.
	L. LAPICQUE	Physiologie générale.
	E. VESSIOT	Théorie des fonctions et théorie des transformations
	A. COTTON	Physique générale.
	J. DRACH	Application de l'analyse à la géométrie.
	Charles FABRY	Physique.
	Charles PÉREZ	Zoologie.
	Léon BERTRAND	Géologie structurale et géologie appliquée.
	R. LESPIEAU	Théories chimiques.
	E. RABAUD	Biologie expérimentale.
	P. PORTIER	Physiologie comparée.
	E. BLAISE	Chimie organique.
	P.-A. DANGEARD	Botanique.
	Paul MONTEL	Mécanique rationnelle.
	P. WINTREBERT	Anatomie et histologie comparées.
	O. DUBOSCQ	Biologie maritime
	G. JULIA	Mathématiques générales.
	A. MAILHE	Étude des combustibles.
	L. LUTAUD	Géographie physique et géologie dynamique.
	Eugène BLOCH	Physique théorique et physique céleste.
	H. VILLAT	Mécanique des fluides et applications.
	Ch. JACOB	Géologie.
	P. PASCAL	Chimie minérale.
	Léon BRILLOUIN	Théories physiques.
	V. AUGER	Chimie appliquée.

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

E. PÉCHARD	Chimie (Enseignement P. C. N.).
M. GUICHARD	Chimie minérale.
A. GUILLET	Physique.
G. MAUGUIN	Minéralogie.
L. BLARINGHEM	Botanique.
A. MICHEL-LÉVY	Pétrographie.
A. DEREIMS	Géologie.
A. DENJOY	Calcul différentiel et intégral.
H. BÉNARD	Physique (P. C. N.).
E. DARMOIS	Physique.
G. BRUHAT	Physique.
H. MOUTON	Chimie physique.
L. JOLEAUD	Paléontologie.
M. JAVILLIER	Chimie biologique.
A. DUFOUR	Physique (P. C. N.).
F. PICARD	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
ROBERT-LÉVY	Zoologie.
L. DUNOYER	Optique appliquée.
A. GUILLIERMOND	Botanique (P. C. N.).
A. DEBIERNE	Radioactivité.
M. FRÉCHET	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
N	Chimie analytique.

Secrétaire A. PACAUD.

A

M. KŒNIGS, *Membre de l'Institut,*
Directeur du Laboratoire de Mécanique

A

MM. H. VILLAT et JEAN VILLEY

Témoignage de gratitude

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553818_0059

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES POUTRES PRISMATIQUES

TABLE des MATIÈRES

Paragr. Pages

PRÉFACE 5

PREMIÈRE PARTIE

RECHERCHE des TENSIONS et des DÉFORMATIONS des POUTRES PRISMATIQUES CREUSES de MINCE ÉPAISSEUR

CHAPITRE I. — **Formules Générales**

1. — Introduction 7
2. — Équations de la théorie de l'élasticité 7
3. — Conditions imposées par la petite épaisseur $N_1 = N_2 = T_3 = 0$ 8
4. — Formule fondamentale de la résistance des matériaux 9
5. — Calcul de l'effort tangentiel $T_\varepsilon = t$ 11
6. — Détermination des constantes $a\ a_1\ a_2\ \ b_1\ b_2\ t_0$ 12
7. — Cas particulier où le prisme n'est soumis qu'à un moment de torsion 14

CHAPITRE II. — **Sections transversales ouvertes**

8. — Impossibilité pour un profil ouvert de résister à un moment de torsion 14
9. — Détermination de l'axe de torsion 15
10. — Applications numériques, vérification expérimentale 15
11. — Instabilité des cylindres creux de mince épaisseur et de section transversale ouverte en compression 17

CHAPITRE III. — **Sections transversales fermées**

12. — Calcul des déplacements u et v 19
13. — Calcul de l'angle de torsion 22
14. — Expression de la constante de torsion J 25
15. — Identité de la constante de torsion J et du moment d'inertie polaire pour un tube rond 25
16. — Vérification expérimentale 25
17. — Déplacement relatif de deux points contigus d'un cylindre fendu suivant une génératrice 27

CHAPITRE IV. — **Recherche de l'approximation de la formule donnant J pour les grandes épaisseurs**

17'. — Hypothèse faite pour appliquer la formule aux sections pleines 29
18. — Calcul de J pour la section circulaire 29
19. — Calcul de J pour la section rectangulaire 29
20. — Calcul de J pour la section triangulaire 30
21. — Calcul de J pour la section hexagonale 31

DEUXIÈME PARTIE

L'INSTABILITÉ des AILES d'AVIONS aux GRANDES VITESSES

22. — Expression du moment en fonction de l'incidence 32
23. — Instabilité d'une aile rigide reliée à un système élastique en torsion 33
24. — Recherche de la vitesse critique d'un monoplan avec ailes en porte à faux constituées par une poutre unique formant caisson..... 34
25. — Constance de la vitesse critique pour des avions homothétiques 36
26. — Application numérique..... 36
27. — Recherche de la vitesse critique d'un monoplan avec ailes en porte à faux constituées par deux longerons identiques..... 37
28. — Application numérique..... 41
29. — Conclusion..... 41
30. — Méthode graphique pour la recherche de la vitesse critique..... 41

TROISIÈME PARTIE

FLAMBEMENT d'une POUTRE SOUMISE à une COMPRESSION et dont les ENCASTREMENTS sont ÉLASTIQUES

31. — Formule générale 43
32. — Cas particuliers, formules d'Euler..... 45

PRÉFACE

L'étude complète d'un problème de flexion ou de torsion d'une poutre prismatique de grande longueur présente, en général, pour l'ingénieur, des difficultés considérables : c'est la recherche de la fonction harmonique φ du problème de Saint-Venant qui satisfait à l'équation du contour; lequel, dans la plupart des cas, est déterminé par des considérations de résistance locale sans qu'il soit possible de le représenter par une forme analytique simple.

Dans toutes les constructions en général, mais plus particulièrement dans les constructions aéronautiques, on est conduit, pour avoir une plus grande légèreté, à placer la matière de la section droite d'une poutre le plus loin possible de la ligne neutre. En d'autres termes on cherche à avoir le plus grand moment d'inertie avec le minimum de section. Cette condition donne aux sections droites des formes creuses d'épaisseur très petite et généralement négligeable eu égard aux autres dimensions.

Le problème de la recherche des tensions et des déformations des poutres prismatiques creuses de mince épaisseur que nous allons traiter dans la première partie est donc très général et sa solution est du plus grand intérêt pour l'ingénieur. Car pour que le matériau employé puisse résister aux efforts de compression nonobstant sa petite épaisseur, il est nécessaire de donner au contour une forme très compliquée qui rend difficile sinon impossible la recherche de la fonction φ dont nous avons parlé plus haut.

Dans le Chapitre I nous rappelons diverses formules générales; nous calculons l'effort tangentiel et nous donnons la formule dans le cas particulier où le prisme n'est soumis qu'à un moment de torsion.

Dans les Chapitres II et III nous étudions séparément les sections transversales ouvertes et fermées; celles-là offrent, en effet, certaines particularités qui permettent de contrôler l'hypothèse que nous sommes autorisés à faire en raison de la petite épaisseur.

Dans le Chapitre II nous étudions également un nouveau problème : l'instabilité des cylindres creux de mince épaisseur, de section transversale ouverte, soumis à une compression.

Dans le Chapitre III nous donnons la formule permettant de calculer la constante de torsion, constante qui a les dimensions d'un moment d'inertie. Nous l'avons vérifiée en l'appliquant à un tube rond où l'on sait que cette constante est égale au moment d'inertie polaire; nous l'avons également contrôlée expérimentalement.

Dans le Chapitre IV nous recherchons l'approximation de la formule donnant la constante de torsion au cas où l'épaisseur n'est pas négligeable.

Dans la deuxième partie nous étudions l'instabilité des ailes d'avions aux grandes vitesses.

Il arrive que des avions très rapides se brisent en vol, non seulement au cours d'évolutions acrobatiques pendant lesquelles évidemment la cellule supporte des efforts énormes, mais aussi au cours de vols en palier à grande vitesse ou dans des descentes en piqué à la verticale.

Les appareils qui se brisent ainsi ont subi pour la plupart les essais statiques qui permettent d'éprouver leur résistance; ou, dans tous les cas, ils ont été calculés en envisageant *toutes les conditions de vol* et en prenant de très larges coeffficients de sécurité.

Ces ruptures ne dépendent donc pas de la résistance de la voilure à la flexion ou à la torsion, mais nous croyons qu'elles sont provoquées par la *déformation de torsion des ailes ;* et nous montrerons dans cette étude que pour un avion, quelle que soit sa solidité, il

existe une vitesse que nous avons appelée vitesse critique, fonction seulement de sa rigidité, qu'il ne peut dépasser sans se rompre.

La recherche de cette vitesse critique est, à notre avis, de la plus haute importance; car nous avons pu établir que des voilures ayant été calculées en vue de résister à toutes les positions du centre de poussée, ainsi qu'au couple de torsion dû au piqué, étaient instables pour des vitesses de l'ordre de 300 km./h. Ces vitesses sont nettement insuffisantes, elles peuvent être atteintes quand un appareil pique sous un angle de 30° et il nous semble qu'il y aurait lieu d'exiger qu'elles soient au moins égales à la vitesse limite de piqué.

Nous venons de parler d'instabilité; c'est qu'en effet pour la vitesse critique, le calcul le mettra plus loin en évidence, une torsion même très petite de l'aile à partir de sa position d'équilibre ira en s'accentuant; ou, en d'autres termes, à partir de cette vitesse la variation du moment des forces aérodynamiques, pour une torsion θ de l'aile autour de *son axe de torsion*, est plus grande que la variation du moment élastique antagoniste correspondant à la même torsion θ. A ce moment, le système devient instable.

Il apparaît donc qu'une nouvelle condition devrait être imposée pour l'établissement des avions, car celles qui existent si elles sont nécessaires ne sont plus suffisantes pour des avions dont la vitesse peut atteindre 250 km./h. et même plus.

Il ne faudrait pas croire que cette nouvelle condition dût entraîner nécessairement une augmentation du poids de la charpente d'un avion. Il suffit pour y satisfaire de placer judicieusement les longerons dans le profil.

La charpente d'une aile se réalise généralement de deux façons : soit avec deux longerons séparés, soit avec un seul longeron formant caisson.

Nous avons recherché la vitesse critique pour ces deux modes de construction dans le cas d'un monoplan en porte à faux. Les formules auxquelles nous sommes arrivés nous ont permis d'établir, pour les grands allongements, la prééminence de l'aile avec poutre-caisson.

Nous croyons qu'il faut voir là le succès de la construction des grands monoplans d'allongement allant jusqu'à 10 et dont les vitesses dépassent 200 km./h.; ces appareils nous semblent impossibles à réaliser avec le système de deux longerons séparés sans redouter des catastrophes.

Dans la troisième partie, nous étudions le flambement d'une poutre soumise à une compression dont les encastrements sont élastiques.

Les formules de flambement données par Euler s'appliquent à des cas bien définis qui ne sont pas généralement réalisés dans une construction.

Pour les grands ouvrages métalliques tels que les ponts où ce n'est jamais un inconvénient d'avoir des pièces plus lourdes, on suppose que la barre qui est soumise à une compression est articulée à ses extrémités.

Pour les constructions aéronautiques, et particulièrement pour les avions devant avoir un plafond élevé, le poids de la cellule a une très grande importance et les ingénieurs sont conduits à tenir compte de toutes les liaisons susceptibles d'augmenter la résistance des éléments constituant la charpente d'un avion.

Une règle empirique, pour tenir compte des liaisons, consiste à admettre que les barres d'un système triangulé, soumises à la compression, sont encastrées d'un côté et articulées de l'autre. Naturellement, cette règle, qui convient dans certains cas, n'est pas généralement applicable.

Nous avons pu établir une équation transcendante qui permet de déterminer la valeur exacte du flambement en fonction de deux coefficients représentant la rigidité des encastrements; la valeur de ces coefficients peut varier de zéro à l'infini, englobant ainsi tous les cas depuis l'articulation jusqu'à l'encastrement parfait. Cette équation il est possible de la résoudre très rapidement par approximations.

R. L.

Vélizy, août 1927.

PREMIÈRE PARTIE

Recherche des tensions et des déformations des poutres prismatiques creuses de mince épaisseur

CHAPITRE PREMIER

FORMULES GÉNÉRALES

1. — Introduction.

La seule hypothèse que nous ferons et qui nous permettra d'éliminer la fonction φ est de supposer que les trois équations du groupe 5, page 8, sont satisfaites non seulement à la surface, mais dans toute l'épaisseur ε de la section transversale.

Cette hypothèse nous conduit à la condition :

$$N_1 = N_2 = T_3 = 0$$

qui est précisément l'hypothèse de Saint-Venant.

Pour obtenir cette condition, nous nous sommes servis des deux premières équations du groupe 5 et nous avons supposé que le prisme creux n'est chargé que sur ses bases. On ne peut, en effet, envisager des charges ou pressions agissant sur les faces latérales, car ces charges provoqueraient, en raison de la mince épaisseur, soit le gonflement, soit l'aplatissement de la section transversale.

L'hypothèse que nous avons faite plus haut ne s'applique évidemment qu'aux prismes creux de mince épaisseur et nous l'avons vérifiée sur des poutres dont les sections transversales remplissaient cette condition; néanmoins, les solutions auxquelles elle conduit peuvent s'appliquer à des cas particuliers où l'épaisseur est appréciable et où la forme de la section transversale ne permet pas de déterminer la fonction φ. Par exemple, dans le cas d'un profilé en U l'axe de torsion ou le centre de chargement déterminé en considérant la ligne moyenne comme section transversale donne certainement le taux de travail minimum.

Plus loin, nous parlerons souvent de sections transversales ouvertes ou fermées et nous verrons ce qui les distingue au point de vue résistance. Géométriquement, nous entendons par section fermée A une section qui décompose le plan en deux domaines, un domaine intérieur Di et un domaine extérieur De tel qu'il est impossible de joindre un point de Di à un point de De par une ligne brisée n'ayant aucun point commun avec A. Inversement, une section ouverte B est une section qui ne décompose pas le plan en deux domaines.

2. — Équations de la théorie de l'élasticité.

Nous partirons des équations de la théorie de l'élasticité.

Tout d'abord nous avons les équations d'équilibre du tétraèdre élémentaire :

$$(1)\quad \begin{cases} T_x = N_1\,\alpha + T_3\,\beta + T_2\,\gamma \\ T_y = T_3\,\alpha + N_2\,\beta + T_1\,\gamma \\ T_z = T_2\,\alpha + T_1\,\beta + N_3\,\gamma \end{cases}$$

T_x T_Y T_z étant les composantes de l'effort agissant sur la face négative d'un élément $d\sigma$ dont la normale a pour cosinus directeurs $\alpha\ \beta\ \gamma$.

En outre, on a les équations générales de l'équilibre d'un milieu continu en supposant négligeables les forces appliquées à l'unité de volume :

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial N_1}{\partial x} + \dfrac{\partial T_3}{\partial y} + \dfrac{\partial T_2}{\partial z} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial T_3}{\partial x} + \dfrac{\partial N_2}{\partial y} + \dfrac{\partial T_1}{\partial z} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial T_2}{\partial x} + \dfrac{\partial T_1}{\partial y} + \dfrac{\partial N_3}{\partial z} = 0 . \end{cases}$$

Enfin, dans un milieu homogène et isotrope, les tensions ont pour expressions en fonction des déformations $u\ v\ w$ considérées comme infiniment petites :

$$(3)\quad \begin{cases} N_1 = \lambda\,\theta + 2\,\mu\,\dfrac{\partial u}{\partial x} & T_1 = \mu\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) \\[2ex] N_2 = \lambda\,\theta + 2\,\mu\,\dfrac{\partial v}{\partial y} & T_2 = \mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \\[2ex] N_3 = \lambda\,\theta + 2\,\mu\,\dfrac{\partial w}{\partial z} & T_3 = \mu\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) . \end{cases}$$

En remplaçant dans le groupe 2 les N et T par leurs valeurs tirées du groupe 3, on obtient les équations indéfinies de l'équilibre :

$$(4)\quad \begin{cases} (\lambda + \mu)\,\dfrac{\partial \theta}{\partial x} + \mu\,\Delta u = 0 \\[2ex] (\lambda + \mu)\,\dfrac{\partial \theta}{\partial y} + \mu\,\Delta v = 0 \\[2ex] (\lambda + \mu)\,\dfrac{\partial \theta}{\partial z} + \mu\,\Delta w = 0 . \end{cases}$$

Auxquelles devront satisfaire les fonctions $u\ v\ w$; θ désignant comme d'habitude le coefficient de dilatation cubique.

3. — Conditions imposées par la petite épaisseur : $N_1 = N_2 = T_3 = 0$.

Considérons un prisme creux de mince épaisseur dont les génératrices sont parallèles à l'axe Oz . Nous supposerons que ce prisme ou cylindre n'est chargé que sur ses bases; on ne peut concevoir, en effet, de charges ou pressions s'exerçant sur les faces latérales intérieures ou extérieures, car elles provoqueraient, en raison de la faible épaisseur, soit le gonflement, soit l'aplatissement du cylindre creux.

On aura donc sur les faces latérales :

$$T_x = 0 \qquad T_Y = 0 \qquad T_z = 0 .$$

D'autre part, puisque nous supposons un prisme ou un cylindre γ est constamment nul :

Les équations (1) deviennent dans ce cas :

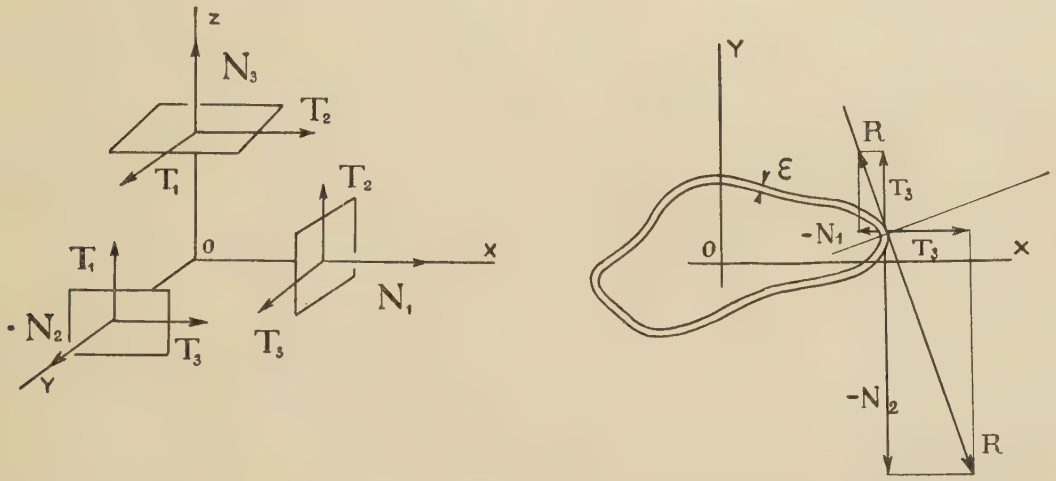
$$(5)\quad \begin{cases} N_1\,\alpha + T_3\,\beta = 0 \\ T_3\,\alpha + N_2\,\beta = 0 \\ T_2\,\alpha + T_1\,\beta = 0 . \end{cases}$$

Les N et les T ayant les significations qu'on leur donne habituellement et qui sont représentées sur le trièdre ci-contre.

En raison de la petite épaisseur et de l'absence de forces latérales, on doit avoir :

$$N_1 = N_2 = T_3 = 0$$

En effet, l'épaisseur étant petite, on peut admettre que les trois équations du groupe 5 sont satisfaites non seulement à la surface, mais dans toute l'épaisseur ε de la section transversale. Nous remarquerons, d'ailleurs, que c'est la seule hypothèse que nous ferons.



Les deux premières équations 5 expriment que les résultantes dont les composantes sont N_1 et T_3 d'une part, et N_2 et T_3 d'autre part, sont tangentes à la section transversale; les forces extérieures agissant sur les faces latérales étant nulles, ces deux résultantes doivent être nulles. On doit donc avoir :

$$N_1 = N_2 = T_3 = 0$$

ce sont précisément les hypothèses de Saint-Venant, mais nous remarquerons qu'elles deviennent ici des conditions.

4. — Formule fondamentale de la résistance des matériaux.

Les conditions $N_1 = N_2 = 0$ donnent :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-\lambda}{2\mu}\theta \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-\lambda}{2\mu}\theta$$

donc :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} .$$

Si on additionne les trois premières équations du groupe 3 membre à membre, il vient :

$$N_1 + N_2 + N_3 = 3\lambda\theta + 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

mais le coefficient de dilatation cubique θ a pour expression :

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

d'une manière générale, on a donc :

$$N_1 + N_2 + N_3 = (3\lambda + 2\mu)\theta$$

avec les conditions $N_1 = N_2 = 0$, il reste :

$$N_3 = (3\lambda + 2\mu)\theta$$

en portant cette valeur dans la troisième équation 3, on obtient :

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{N_3 - \lambda\theta}{2\mu} = \frac{\lambda + \mu}{\mu}\theta .$$

D'autre part, θ satisfait à la condition $\Delta\theta = 0$ $\Delta\theta$ étant le symbole de l'équation de Laplace ou :

$$\Delta\theta = \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} .$$

En effet, dérivons les équations indéfinies de l'équilibre respectivement par rapport à $x\ y\ z$ et ajoutons, il vient :

$$(\lambda + \mu)\Delta\theta + \mu\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta u + \frac{\partial}{\partial y}\Delta v + \frac{\partial}{\partial z}\Delta w\right) = 0$$

ou :

$$(\lambda + \mu)\Delta\theta + \mu\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

et, enfin $(\lambda + 2\mu)\Delta\theta = 0$, d'ou $\Delta\theta = 0$.

De cette dernière condition, il résulte en tenant compte des équations 3 :

$$\Delta\frac{\partial u}{\partial x} = \Delta\frac{\partial v}{\partial y} = \Delta\frac{\partial w}{\partial z} = 0 .$$

Si l'on tient compte de ces dernières conditions dans les équations indéfinies de l'équilibre différentiées respectivement par rapport à $x\ y\ z$, on obtient :

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = 0 .$$

D'autre part, puisque $T_3 = 0$:

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 .$$

Si l'on différentie maintenant la première équation indéfinie de l'équilibre par rapport à y et la seconde par rapport à x , on obtient en les ajoutant :

$$2(\lambda + \mu)\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y} + \mu\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0$$

d'où la nouvelle condition :

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y} = 0 .$$

Donc, la dilatation cubique θ et les fonctions $N_3\ \frac{\partial w}{\partial z}\ \frac{\partial u}{\partial x}\ \frac{\partial v}{\partial y}$ qui lui sont proportionnelles ne peuvent contenir $x\ y\ z$ à une puissance supérieure à la première et, de plus, elles ne peuvent renfermer le produit $x\ y$; on aura donc en particulier pour N_3 une expression de la forme :

$$N_3 = (a + a_1 x + a_2 y) + z(b + b_1 x + b_2 y) .$$

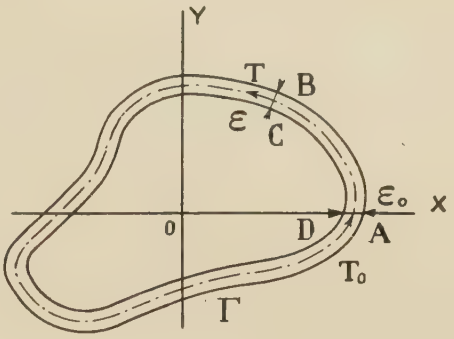
Telle est la formule qui sert de base à toute la résistance des matériaux.

5. — Calcul de l'effort tangentiel $T\varepsilon = t$.

Considérons maintenant une section transversale dont le contour Γ est absolument quelconque, mais que nous supposerons fermé.

Soit O son centre de gravité où nous plaçons l'origine et O X et O Y les axes principaux d'inertie.

Nous rappelons que la seule hypothèse que nous avons faite est d'admettre que les trois équations 5 sont satisfaites non seulement à la surface, mais dans toute l'épaisseur du contour Γ . Des deux premières, nous avons déduit les conditions $N_1 = N_2 = T_3 = 0$; il nous reste la troisième équation :



$$T_2\,\alpha + T_1\,\beta = 0 \ .$$

où α et β sont les cosinus directeurs de la normale à la surface latérale ou sensiblement, puisque l'épaisseur ε est supposée petite, à la ligne moyenne représentée sur la figure par un trait mixte.

Cette troisième équation exprime que l'effort tranchant T dont les composantes sont T_2 et T_1 est tangent au contour de la section transversale.

Considérons l'intégrale étendue à tout le contour A B C D :

$$\int_{ABCD} (T_2\,\alpha + T_1\,\beta)\,ds \ .$$

Les cosinus directeurs α β ont pour expressions :

$$\alpha = \frac{dy}{ds} \qquad \beta = -\frac{dx}{ds}$$

on a donc :

$$\int (T_2\,\alpha + T_1\,\beta)\,ds = \int (T_2\,dy - T_1\,dx)$$

et, d'après la formule de Green :

$$\int_{ABCD} (T_2\,\alpha + T_1\,\beta)\,ds = \iint \left(\frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial x}\right) dx\,dy \ .$$

L'intégrale double du second membre étant étendue à toute la section comprise à l'intérieur du contour A B C D .

L'intégrale curviligne du premier membre a pour valeur :

$$T\,\varepsilon - T_0\,\varepsilon_0 \ .$$

T et ε représentant l'effort tranchant et l'épaisseur au droit de B C et T_0 et ε_0 au droit de A D .

D'autre part, nous avons la troisième équation générale d'équilibre :

$$\frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} = 0$$

il reste donc :

$$T\,\varepsilon - T_0\,\varepsilon_0 = -\iint \frac{\partial N_3}{\partial z}\,dx\,dy$$

nous avons vu que N_3 avait pour expression :

$$N_3 = (a + a_1 x + a_2 y) + z (b + b_1 x + b_2 y)$$

donc :

$$T\varepsilon - T_0 \varepsilon_0 = - b \iint dx\, dy - b_1 \iint x\, dx\, dy - b_2 \iint y\, dx\, dy \ .$$

Les intégrales doubles du second membre étant toujours étendues à toute la section comprise à l'intérieur du contour A B C D .

Comme l'origine a été choisie au centre de gravité, si toutes les intégrales sont étendues au contour Γ , il vient :

$$T_0 \varepsilon_0 - T_0 \varepsilon_0 = - b \iint dx\, dy$$

b est donc nécessairement nul; il reste donc :

$$\boxed{t - t_0 = - b_1 S_Y - b_2 S_X}$$

en posant $T \varepsilon = t$, t étant l'effort tangentiel par unité de longueur du contour; et S_Y étant le moment statique de la section comprise dans le contour A B C D par rapport à l'axe des Y et S_X le moment par rapport à l'axe des X .

6. — Détermination des constantes a a_1 a_2 b_1 b_2 t_0 .

Pour que les tensions t et N_3 soient déterminées, il faut d'abord déterminer les six inconnues a a_1 a_2 b_1 b_2 et t_0 . Pour cela, il nous faut six équations que nous obtiendrons en écrivant que le système des forces N_3 et t , dans une section transversale quelconque, est statiquement équivalent à celui qui est appliqué sur l'une des bases, puisque les forces appliquées à la surface latérale sont nécessairement nulles.

A une distance z de l'origine, on a :

$$M_X = M_{OX} + Y z$$

M_X étant le moment par rapport à l'axe des x dans la section transversale considérée.
M_{OX} étant le moment à l'origine.
Y est la composante de la force appliquée à l'origine.

Ce moment doit être égal à celui des tensions N_3 par rapport à OX ou :

$$M_X = \iint N_3\, y\, dx\, dy$$

l'intégrale étant étendue à la section entière du prisme, donc :

$$M_{OX} + Y z = \iint (a + a_1 x + a_2 y)\, y\, dx\, dy + z \iint (b_1 x + b_2 y)\, y\, dx\, dy \ .$$

L'origine ayant été choisie au centre de gravité et les axes étant les axes principaux d'inertie, on a :

$$\iint y\, dx\, dy = 0 \qquad \text{et} \qquad \iint x\, y\, dx\, dy = 0$$

il reste donc :

$$M_{OX} + Y z = a_2 \iint y^2\, dx\, dy + z\, b_2 \iint y^2\, dx\, dy$$

mais :

$$\iint y^2\, dx\, dy = I_x$$

I_x étant le moment d'inertie de la section entière par rapport à OX .

On a donc enfin :

$$M_{ox} + Y z = a_2 I_x + z\, b_2 I_x \ .$$

Cette équation devant être satisfaite quel que soit z , on a identiquement :

$$a_2 = \frac{M_{ox}}{I_x} \qquad b_2 = \frac{Y}{I_x} \ .$$

On trouverait de même :

$$a_1 = \frac{M_{oy}}{I_y} \qquad b_1 = \frac{X}{I_y}$$

Pour déterminer la constante a , nous avons l'équation :

$$\iint N_3\, dx\, dy = Z$$

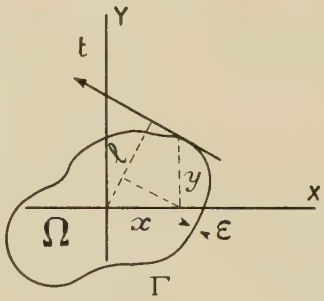
Z étant la composante de la force appliquée à l'origine; d'où il vient :

$$a \iint dx\, dy = Z \qquad \text{ou enfin} \qquad a = \frac{Z}{\omega}$$

ω étant la surface de la section transversale du prisme.

Il ne reste plus qu'à déterminer t_0 .

Pour cela, nous écrirons que :



$$M_{oz} = \int_\Gamma t\, l\, ds$$

l'intégrale étant étendue à tout le contour Γ , mais $l = x\alpha + y\beta$.

Les valeurs α et β étant comme nous l'avons vu :

$$\alpha = \frac{dy}{ds} \qquad \beta = -\frac{dx}{ds} \ .$$

On a donc :

$$M_{oz} = \int_\Gamma t\,(x\, dy - y\, dx)$$

ou en remplaçant t par sa veleur :

$$M_{oz} = t_0 \int_\Gamma (x\, dy - y\, dx) - b_1 \int_\Gamma S_Y\,(x\, dy - y\, dx) - b_2 \int_\Gamma S_X\,(x\, dy - y\, dx)$$

remarquons que :

$$\int_\Gamma (x\, dy - y\, dx) = \iint (1 + 1)\, dx\, dy = 2\,\Omega$$

Ω étant la surface entière enfermée dans le prisme ou cylindre creux.

Donc :

$$M_{oz} = 2\,\Omega\, t_0 - b_1 \int_\Gamma S_Y\,(x\, dy - y\, dx) - b_2 \int_\Gamma S_X\,(x\, dy - y\, dx)$$

ou :

$$M_{oz} = 2\,\Omega\, t_0 - b_1 \int_\Gamma S_Y\, l\, ds - b_2 \int_\Gamma S_X\, l\, ds\ .$$

Les intégrales du second membre pouvant être déterminées en faisant la somme d'élément suffisamment petits :

$$\Sigma\, S_Y\, l\, \Delta s \qquad \text{et} \qquad \Sigma\, S_X\, l\, \Delta s\ .$$

On voit donc que dans le cas des prismes ou cylindres creux de mince épaisseur les tensions t peuvent être déterminées sans avoir à rechercher préalablement la fonction harmonique φ qui doit satisfaire à l'équation du contour et qu'il est, en général, impossible de déterminer; le contour n'ayant pas nécessairement une forme analytique simple.

7. — Cas particulier ou le prisme n'est soumis qu'à un moment de torsion.

Un cas particulier intéressant est celui où le prisme creux n'est soumis à aucune flexion, mais seulement à une torsion; dans ce cas, b_1 et b_2 sont nuls et :

$$\boxed{t_0 = \frac{M_{oz}}{2\,\Omega}}$$

la formule donnant t :

$$t - t_0 = -\, b_1\, S_Y - b_2\, S_X \quad \text{devient} \quad t = t_0\ .$$

L'effort tangentiel par unité de longueur est donc constant et indépendant de l'épaisseur du prisme, laquelle peut être variable le long du contour.

CHAPITRE II

SECTIONS TRANSVERSALES OUVERTES

8. — Impossibilité pour un profil ouvert de résister à un moment de torsion.

Il est bien évident que les formules que nous avons établies s'appliquent également quand la section transversale est une section ouverte.

Quand la flexion est nulle, il est clair que pour les sections transversales ouvertes la condition $t = C^{te}$ devient $t = 0$.

Donc un prisme creux de mince épaisseur dont la section transversale est une section ouverte est incapable de résister à un moment de torsion. Nous verrons plus loin qu'il ne peut également résister à un effort de compression, l'équilibre étant instable.

L'emploi de ces formes est donc soumis aux deux conditions restrictives :

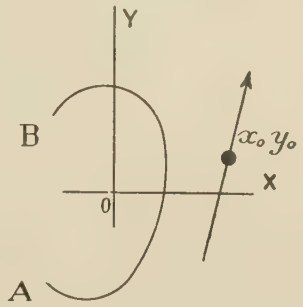
$$M_{oz} = 0 \qquad Z = 0\ .$$

D'autre part, la constante de torsion des poutres de cette forme étant théoriquement nulle et pratiquement infiniment petite, elles ont tendance à se déverser.

9. — Détermination de l'axe de torsion.

Nous allons continuer de nous occuper des prismes creux dont les sections transversales sont ouvertes; ils offrent, en effet, certaines particularités intéressantes, même paradoxales qui permettront de vérifier l'hypothèse que nous avons faite, à savoir : que les trois équations du groupes 5 sont satisfaites non seulement à la surface latérale, mais dans toute l'épaisseur du contour.

Considérons la section transversale ci-contre d'un prisme creux de grande longueur encastré d'un côté et soumis de l'autre à une charge dont les composantes sont X et Y ; et recherchons le point de la section où doit être appliquée la force pour que la torsion soit nulle.



L'origine étant au centre de gravité et les axes étant les axes principaux d'inertie, on a :

$$t - t_0 = - b_1 S_Y - b_2 S_X$$

En A $t = 0$ de sorte que si ce point a été choisi comme origine des S_X et S_Y, il vient :

$$t_0 = 0$$

et le moment de torsion M_{oz} des efforts t a pour expression :

$$M_{oz} = \int_A^B t\, l\, ds = - b_1 \int_A^B S_Y\, l\, ds - b_2 \int_A^B S_X\, l\, ds$$

mais, nous avons vu que :

$$b_1 = \frac{X}{I_Y} \qquad b_2 = \frac{Y}{I_X}$$

on a donc :

$$M_{oz} = - \frac{X}{I_Y} \int_A^B S_Y\, l\, ds - \frac{Y}{I_X} \int_A^B S_X\, l\, ds\ .$$

Pour qu'il n'y ait aucune torsion, il faut que ce moment soit égal à celui des forces extérieures agissant sur la base du prisme, soit :

$$M_{oz} = Y\, x_0 - X\, y_0$$

x_0 et y_0 étant les coordonnées du point d'application de la force.

Donc :

$$Y\, x_0 - X\, y_0 = - \frac{X}{I_Y} \int_A^B S_Y\, l\, ds - \frac{Y}{I_X} \int_A^B S_X\, l\, ds\ .$$

Cette équation devant être satisfaite quelle que soit la force appliquée à la base, on a identiquement :

$$x_0 = - \frac{1}{I_X} \int_A^B S_X\, l\, ds \qquad y_0 = \frac{1}{I_Y} \int_A^B S_Y\, l\, ds\ .$$

10. — Applications numériques, vérification expérimentale.

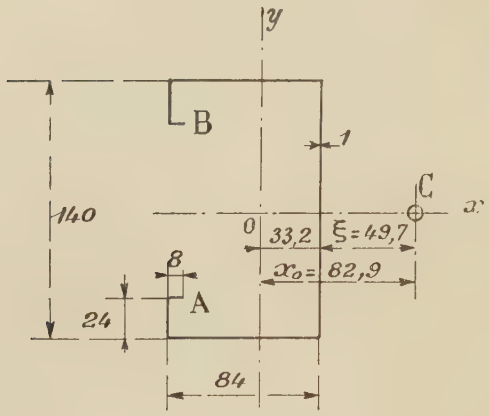
En appliquant ces formules à la section transversale représentée ci-contre, l'épaisseur étant supposée égale à l'unité, on trouve :

$$\int_A^B S_X\, l\, ds = - 100.778.896 \text{ mm}^5$$

l'intégrale étant prise naturellement de A à B , c'est-à-dire dans le sens direct.

D'autre part :

$$I_x = 1.215.642 \text{ mm}^4.$$



il vient donc :

$$x_0 = \frac{100.778.896}{1.215.642} = 82 \text{ mm. } 9$$

à cause de la symétrie :

$$\int_A^B S_Y \, l \, ds = 0$$

de sorte que :

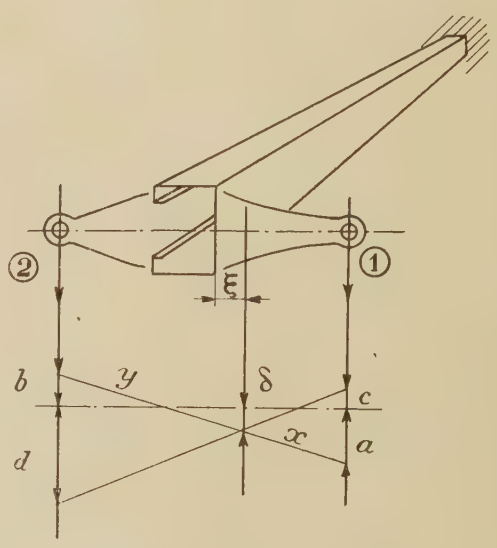
$$y_0 = 0 \, .$$

Nous arrivons donc à cette condition, qui paraît d'abord paradoxale, *qu'une poutre prismatique, dont la section transversale est celle qui est représentée ci-dessus, doit être chargée en un point* c *qui se trouve en dehors de la section et à une distance de l'âme* $\xi = 49$ mm. 7.

Le prisme soumis à une torsion doit donc tourner autour du point *c* ; c'est ce qu'un essai nous a permis de contrôler. Les dimensions de la section transversale du prisme essayé étaient sensiblement celles de la section considérée ci-dessus réduites au quart.

La poutre prismatique était encastrée d'un côté et de l'autre on la chargeait successivement en (1) et (2) ; de cette façon, l'influence de l'abaissement δ se trouvait éliminée. On a, en effet :

$$\frac{x}{y} = \frac{a - \delta}{b + \delta} = \frac{c + \delta}{d - \delta} = \frac{a + c}{b + d} \, .$$



On a trouvé : $\xi = 12,2 + 0,25 = 12,45$. 0,25 représente la moitié de l'épaisseur du profil essayé.

Le rapport exact étant $\frac{1}{4,07}$, on aurait dû trouver : $\xi = 12,2$.

On voit que l'hypothèse que nous avons faite se trouve très exactement vérifiée, les petites différences provenant de la barre qui n'était pas rigoureusement droite et de l'encastrement qui obligeait les sections voisines à rester planes.

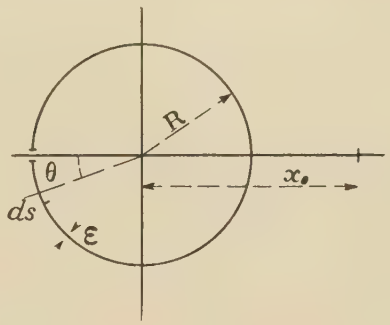
Du même essai et de la formule $\theta = \frac{M\,L}{G\,J}$ où θ est l'angle de torsion, M le moment de torsion L la longueur, G le coefficient d'élasticité au cisaillement et J un coefficient qui a les dimensions d'un moment d'inertie, on a déduit : $J = 11,6$ mm⁴ , alors que le moment d'inertie polaire de la section était de 11.366 mm⁴. Un tube rond de même développement aurait eu un moment d'inertie polaire de 8.000 environ. On voit donc que l'hypothèse que nous avons faite se trouve de nouveau justifiée, 11,6 étant négligeable devant 8.000. D'ailleurs, cette valeur de 11,6 représente un maximum à cause de l'encastrement qui oblige les sections voisines à rester planes comme nous l'avons déjà fait remarquer.

Pour une section transversale ayant la forme d'une cornière, il est de toute évidence que la condition de torsion nulle ne sera satisfaite que si la cornière se trouve chargée en B . L'axe de torsion coupe donc le plan du tableau en B .

Nous nous proposons maintenant de rechercher l'axe de torsion d'un tube circulaire fendu suivant une génératrice.

Nous supposerons l'épaisseur ε constante.

On a :



$$S_x = \varepsilon \int_0^s y\, ds \ .$$

Mais $s = R\,\theta$ d'où $ds = R\,d\,\theta$, donc :

$$S_x = R\,\varepsilon \int_0^\theta y\, d\,\theta \ .$$

On peut écrire : $y = -R \sin\theta$ d'où :

$$S_x = -R^2\,\varepsilon \int_0^\theta \sin\theta\, d\theta = -R^2\,\varepsilon\,(1 - \cos\theta)$$

en portant cette dernière valeur dans la formule donnant la valeur de x_0 , il vient :

$$x_0 = \frac{1}{I_x} \int_0^{2\pi} R^2\,\varepsilon\,(1 - \cos\theta)\,R\,ds$$

ou :

$$x_0 = \frac{R^4\,\varepsilon}{I_x} \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)\,d\theta = \frac{2\,\pi\,R^4\,\varepsilon}{I_x}$$

mais :

$$I_0 = \frac{\pi\,D^3\,\varepsilon}{4} = 2\,\pi\,R^3\,\varepsilon$$

donc :

$$I_x = \pi\,R^3\,\varepsilon$$

il vient enfin :

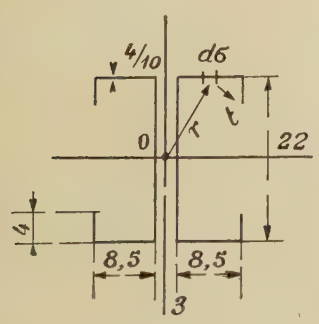
$$x_0 = \frac{2\,\pi\,R^4\,\varepsilon}{\pi\,R^3\,\varepsilon} = 2\,R \ .$$

Le centre de rotation se trouve donc à une distance de l'axe égale au diamètre du tube.

Par les exemples qui précèdent, on se rend compte de l'erreur que commettent la plupart des ingénieurs qui chargent une poutre, quelle que soit sa section transversale, au centre de gravité; dans l'impossibilité qu'ils sont de déterminer la fonction harmonique φ .

11. — Instabilité des cylindres creux de mince épaisseur et de section transversale ouverte en compression.

Considérons une section transversale ouverte que nous supposerons, pour plus de simplicité, symétrique par rapport aux deux axes. Ce sera, par exemple, celle qui est indiquée ci-contre et qui est constituée par deux U accolés.



Sous l'influence d'une torsion θ les divers éléments $d\sigma$ décrivent des hélices dont l'axe passe par le point O .

Supposons que le prisme dont la longueur est L ait une torsion initiale θ_0 ; sous la compression Z des efforts t tangents à l'hélice vont naître qui auront pour valeur :

$$t = \frac{Z}{\omega} \cdot \frac{r\,\theta_0}{L}\,d\sigma \ .$$

Sous l'influence de ces efforts, la torsion va s'accentuer et deviendra θ ; on aura alors :

$$t = \frac{Z}{\omega}\,\frac{r\,\theta}{L}\,d\sigma$$

ω étant la section droite du prisme.

Le moment de torsion de tous ces efforts pour la section entière a pour valeur :

$$M = \int t\, r = \frac{Z}{\omega}\, \frac{\theta}{L} \int r^2\, d\sigma = \frac{Z\,\theta}{\omega\, L}\, I_0$$

car $\int r^2\, d\sigma = I_0$ I_0 étant le moment d'inertie polaire.

Le moment que nous venons de trouver est égal au moment élastique de torsion, puisque nous admettons que l'équilibre existe. Comme nous le savons ce moment se déduit de la formule :

$$\theta - \theta_0 = \frac{ML}{GJ} \quad .$$

On a donc l'égalité :

$$\frac{Z\,\theta}{\omega\, L}\, I_0 = \frac{(\theta - \theta_0)\, G\, J}{L}$$

d'où l'on déduit :

$$\theta = \frac{\theta_0\, G\, J\, \omega}{G\, J\, \omega - Z\, I_0} \quad .$$

On voit immédiatement que pour : $G\,J\,\omega = Z\,I_0$ θ devient infini; c'est un cas d'instabilité.

On peut encore écrire :

$$\frac{Z}{\omega} = \frac{G\,J}{I_0}$$

mais $\frac{Z}{\omega}$ représente le taux de travail σ pour lequel l'instabilité existe; c'est ce taux de travail qu'on ne pourra pas dépasser en compression, donc :

$$\sigma = \frac{G\,J}{I_0}$$

posons $\frac{J}{I_0} = \lambda$ λ étant un coefficient sans dimension qui caractérise la section au point de vue torsion.

Il vient alors :

$$\boxed{\sigma = G\,\lambda} \quad .$$

L'instabilité pour les sections fermées n'existe jamais. En effet, nous verrons plus loin que pour la section rectangulaire étudiée page 26 $\lambda = 0{,}24$, donc $\sigma = G \times 0{,}24$ et pour l'acier $\sigma = 7.000 \times 0{,}24 = 1.680$ kg./mm² ; c'est une limite qui n'est évidemment jamais atteinte.

Pour les sections ouvertes λ est théoriquement nul, on a donc :

$$\sigma = 0$$

Une section ouverte de faible épaisseur ne peut donc pas résister à un effort de compression. — En réalité, λ est très petit et nous avons trouvé pour la forme de la page 17.

$$J = 5{,}5 \qquad \text{d'où} \qquad \lambda = \frac{5{,}5}{3.512} = 0{,}001565 \quad .$$

On avait en effet $I_x = 2.428$ $I_Y = 1.084$ d'où $I_0 = 3.512$.

On aurait donc :

$$\sigma = G \times 0{,}001565$$

et pour l'acier :

$$\sigma = 7.000 \times 0{,}001565 = 10{,}95 \text{ kg./mm}^2$$

valeur évidemment trop petite car, en aéronautique, les aciers employés donnent jusqu'à 160 kg. par millimètre carré en traction.

Si pour une forme donnée on connaît la loi donnant λ en fonction de l'épaisseur, loi qui peut être déterminée par quelques essais, on pourra prédéterminer l'épaisseur pour laquelle l'égalité :

$$K = G\,\lambda$$

sera satisfaite; K étant, par exemple, la résistance du matériau considéré à la traction.

Certains auteurs ont donné pour J une expression de la forme :

$$J = A\,\varepsilon^3$$

A étant une constante dépendant de la forme et ε l'épaisseur; nous n'avons pu vérifier cette formule. Si elle est vraie, λ est de la forme :

$$\lambda = B\,\varepsilon^2$$

B étant une constante dépendant de la forme. En triplan l'épaisseur du prisme que nous avons considéré page 17, on aurait donc :

$$\sigma = 10{,}95 \times 3^2 = 100 \text{ kg/mm}^2 \quad .$$

Cette valeur paraît acceptable et l'ordre de l'épaisseur à employer pour des prismes de cette forme serait donc de $0{,}4 \times 3 = 1{,}2$ mm.

CHAPITRE III

SECTIONS TRANSVERSALES FERMÉES

12. — Calcul des déplacements u et v .

Maintenant que l'hypothèse qui a servi de base au calcul des prismes creux de mince épaisseur est entièrement vérifiée, nous allons rechercher les déformations u et v suivant x et y ; nous en déduirons ensuite la valeur du coefficient J qui rentre dans la formule $\theta = \frac{ML}{GJ}$ pour une forme de section quelconque. Cette formule est d'une importance capitale pour l'ingénieur; elle permet de prédéterminer, étant donné J , l'angle de torsion θ d'une poutre prismatique soumise à un moment de torsion M .

On a vu que (page 9) :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\lambda}{2\,\mu}\,\theta$$

θ étant, dans cette dernière formule, le coefficient de dilatation cubique.

En fonction de N_3 :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} N_3 = -\frac{\eta}{E} N_3$$

en posant :

$$\frac{1}{E} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}$$

E étant ce qu'on appelle le coefficient d'élasticité et :

$$\eta = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

η étant le coefficient de Poisson.

En remplaçant N_3 par sa valeur, il vient :

$$-\frac{E}{\eta}\frac{\partial u}{\partial x} = (a + a_1 x + a_2 y) + z(b_1 x + b_2 y)$$

et en intégrant :

$$-\frac{E}{\eta} u = \left(a x + \frac{a_1 x^2}{2} + a_2 y x\right) + z\left(\frac{b_1 x^2}{2} + b_2 x y\right) + F(y z)$$

$F(y z)$ étant une fonction arbitraire jouant le rôle de constante.

Dans les équations ci-dessus, nous supposons toujours l'origine placée au centre de gravité, par conséquent, b est nul dans l'expression de N_3 .

Pour déterminer la fonction $F(y z)$ remarquons que :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

d'autre part, nous avons vu que :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

il résulte immédiatement de ces deux équations :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

d'où :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

la première équation indéfinie d'équilibre :

$$\Delta u = -\frac{\lambda + \mu}{\mu}\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}\frac{\partial N_3}{\partial x} = -\frac{1}{E}\frac{\partial N_3}{\partial x}$$

devient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{E}\frac{\partial N_3}{\partial x} .$$

L'équation $F(y z)$ doit donc satisfaire aux deux nouvelles conditions :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{E}\frac{\partial N_3}{\partial x}$$

de la première, on déduit :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -(a_1 + b_1 z)$$

de la seconde :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{1}{\eta}(a_1 + b_1 z) \ ,$$

en intégrant la première de ces équations, on a :

$$F = -\left(\frac{a_1 y^2}{2} + \frac{b_1 z y^2}{2}\right) + \varphi(z)\, y + \psi(z)$$

$\varphi(z)$ et $\psi(z)$ étant deux fonctions jouant le rôle de constante.

En prenant la dérivée seconde de cette expression par rapport à z, il vient :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \varphi''(z)\, y + \psi''(z) = \frac{1}{\eta}(a_1 + b_1 z) \ .$$

Cette équation devant être satisfaite quelles que soient y et z, on a :

$$\varphi''(z) = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \varphi(z) = k_1 z + k_2$$

et :

$$\psi''(z) = \frac{1}{\eta}(a_1 + b_1 z)$$

d'où :

$$\psi(z) = \frac{1}{\eta}\left(\frac{a_1 z^2}{2} + \frac{b_1 z^3}{6}\right) + k_3 z + k_4 \ .$$

La fonction $F(y\, z)$ s'écrit donc :

$$F(y\, z) = -\left(\frac{a_1 y^2}{2} + \frac{b_1 z y^2}{2}\right) + k_1 z y + k_2 y + \frac{1}{\eta}\left(\frac{a_1 z^2}{2} + \frac{b_1 z^3}{6}\right) + k_3 z + k_4$$

et pour u on a l'expression :

$$-\frac{E u}{\eta} = \left(a x + \frac{a_1 x^2}{2} + a_2 y x\right) + z\left(\frac{b_1 x^2}{2} + b_2 x y\right)$$

$$-\left(\frac{a_1 y^2}{2} + \frac{b_1 z y^2}{2}\right) + k_1 z y + k_2 y + \frac{1}{\eta}\left(\frac{a_1 z^2}{2} + \frac{b_1 z^3}{6}\right) + k_3 z + k_4 \ .$$

Pour simplifier l'expression de u nous pouvons nous imposer certaines conditions à l'origine.

Nous supposerons que l'origine ne subit aucun déplacement; c'est-à-dire que pour $x\, y\, z = 0$ $u = 0$ dans ce cas $k_4 = 0$.

Enfin, on peut encore supposer que l'origine ne subit aucune rotation, on a alors : $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ d'où $k_2 = 0$.

L'expression de u devient donc finalement :

$$-\frac{E}{\eta} u = \left(a x + \frac{a_1 x^2}{2} + a_2 y x\right) + z\left(\frac{b_1 x^2}{2} + b_2 x y\right) - \left(\frac{a_1 y^2}{2} + \frac{b_1 z y^2}{2}\right)$$

$$+ k_1 z y + \frac{1}{\eta}\left(\frac{a_1 z^2}{2} + \frac{b_1 z^3}{6}\right) + k_3 z \ .$$

Remarquons que nous n'avons pas le droit de supposer que l'origine est encastrée, c'est-à-dire que $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ pour $x\ y\ z = 0$, car ce serait préjuger de la position de l'axe de torsion du prisme et introduire ainsi des liaisons surabondantes.

Pour déterminer v, il suffit de permuter $x\ a_1\ b_1$ avec $y\ a_2\ b_2$ et de changer le signe de k_1, car les expressions u et v doivent satisfaire à la condition :

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

pour v, on aura donc l'expression :

$$-\frac{E}{\eta} v = \left(a\,y + a_1\,x\,y + \frac{a_2\,y^2}{2}\right) + z\left(b_1\,x\,y + \frac{b_2\,y^2}{2}\right) - \left(\frac{a_2\,x^2}{2} + \frac{b_2\,z\,x^2}{2}\right)$$
$$- k_1\,z\,x + \frac{1}{\eta}\left(\frac{a_2\,z^2}{2} + \frac{b_2\,z^3}{6}\right) + k'_3\,z$$

k'_3 étant évidemment différent de k_3.

13. — Calcul de l'angle de torsion.

Ce que nous nous proposons de rechercher c'est l'angle de torsion d'une poutre prismatique creuse de mince épaisseur, de section transversale quelconque, soumise à une torsion pure; sans avoir à déterminer la fonction φ que l'on rencontre dans le problème de Saint-Venant et que nous avons déjà évitée, grâce à l'hypothèse que nous avons faite, dans le calcul des tensions internes.

Pour une torsion pure, les constantes $a\ a_1\ a_2\ b_1\ b_2$ sont nulles et l'on a :

$$-\frac{E}{\eta} u = k_1\,z\,y + k_3\,z$$

$$-\frac{E}{\eta} v = -k_1\,z\,x + k'_3\,z$$

posons :

$$k_3 = -k_1\,y_0 \qquad \text{et} \qquad k'_3 = k_1\,x_0$$

y_0 et x_0 étant deux nouvelles constantes; il vient :

$$-\frac{E}{\eta} u = k_1\,z\,(y - y_0)$$

$$-\frac{E}{\eta} v = -k_1\,z\,(x - x_0)$$

pour $y = y_0$ et $x = x_0$, on a : $u = 0$ $v = 0$, donc le point de coordonnées. x_0 et y_0 est le centre de torsion de la section.

Considérons maintenant les cinquième et sixième équations du groupe 3 :

$$T_1 = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$T_2 = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

mais T étant comme nous l'avons vu l'effort tranchant tangent au contour, on a :

$$T_1 = T\,\alpha \qquad\qquad T_2 = -T\,\beta\,.$$

on a donc :

$$T\alpha = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$-T\beta = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right).$$

Multiplions la première de ces équations par α, la seconde par β et soustrayons; il vient :

$$T = \mu\left[\frac{\partial w}{\partial y}\alpha - \frac{\partial w}{\partial x}\beta + \frac{\partial v}{\partial z}\alpha - \frac{\partial u}{\partial z}\beta\right]$$

ou en se rappelant que $\alpha = \frac{dy}{ds}$ et $\beta = -\frac{dx}{ds}$:

$$T = \mu\left[\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dx}{ds}\right].$$

Si nous appelons r le déplacement projeté sur la tangente au contour, on a :

$$r = v\alpha - u\beta$$

d'où :

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z}\alpha - \frac{\partial u}{\partial z}\beta$$

d'autre part :

$$\frac{dw}{ds} = \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{ds}$$

on a donc finalement :

$$T = \mu\left[\frac{dw}{ds} + \frac{\partial r}{\partial z}\right]$$

pour un prisme dont la section transversale est ouverte, nous avons vu que $T = 0$, donc :

$$\boxed{\frac{dw}{ds} + \frac{\partial r}{\partial z} = 0\,.}$$

Nous supposerons dans ce qui va suivre que la section transversale est une section fermée, puisqu'aussi bien les sections ouvertes sont incapables de résister en torsion.

Multiplions les deux membres de l'équation de T par ds et intégrons le long du contour fermé complet Γ.

$$\int_\Gamma T\,ds = \mu\left[\int_\Gamma dw + \int_\Gamma \frac{\partial r}{\partial z}\,ds\right].$$

Remarquons d'abord que l'intégrale $\int_\Gamma dw$ est nulle; en effet, le long d'un contour fermé, en un point déterminé, w reprend la même valeur quand on a fait le tour complet de la section, c'est-à-dire que w est une fonction continue de s.

Il n'en serait plus de même si la section était ouverte; en effet, quand on prend un tube fendu suivant une génératrice et qu'on le soumet à une torsion, les points A et B se déplacent de part et d'autre du plan perpendiculaire à l'axe, sur lequel ils se trouvaient avant la torsion.

Il reste donc :

$$\int_\Gamma T\,ds = \mu \int_\Gamma \frac{\partial r}{\partial z}\,ds$$

ou en revenant aux anciennes notations :

$$\int_\Gamma T\,ds = \mu \int_\Gamma \left(\frac{\partial v}{\partial z}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dx \right)$$

mais nous savons que dans le cas d'une torsion pure :

$$-\frac{E}{\eta}\,u = k_1\,z\,(y - y_0)$$

$$-\frac{E}{\eta}\,v = -k_1\,z\,(x - x_0)$$

donc :

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\eta}{E}\,k_1\,(x - x_0) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\eta}{E}\,k_1\,(y - y_0)$$

en tenant compte de ces valeurs, il vient :

$$\int_\Gamma T\,ds = \frac{\mu\,\eta}{E}\,k_1 \int_\Gamma (x\,dy - y\,dx) - \frac{\mu\,\eta}{E}\,k_1 \int_\Gamma (x_0\,dy - y_0\,dx)$$

ou encore en appliquant la formule de Green et en remarquant que $\int_\Gamma (x_0\,dy - y_0\,dx) = 0$ il vient :

$$\int_\Gamma T\,ds = \frac{\mu\,\eta}{E}\,k_1\,2\,\Omega$$

Ω étant, comme nous l'avons vu, la surface entière enfermée dans la section transversale du cylindre creux.

Nous savons que $T = \frac{t}{\varepsilon}$ ou, puisque nous considérons une torsion pure :

$$T = \frac{t_0}{\varepsilon} = \frac{M_{oz}}{2\,\Omega\,\varepsilon}\,.$$

En définitive, on a donc pour k_1 l'expression :

$$k_1 = \frac{E}{\mu\,\eta\,2\,\Omega} \int_\Gamma T\,ds = \frac{M_{oz}\,E}{4\,\Omega^2\,\mu\,\eta} \int_\Gamma \frac{ds}{\varepsilon}\,.$$

Ce qu'il est intéressant de connaître pour l'ingénieur, c'est l'angle de torsion d'une poutre prismatique soumise à un moment M_{oz} ; or, on a :

$$\theta = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\eta}{E}\,k_1\,z$$

ou encore en remplaçant k_1 par sa valeur :

$$\boxed{\theta = \frac{M_{oz}}{\mu\,4\,\Omega^2}\,z \int_\Gamma \frac{ds}{\varepsilon}}\,.$$

14. — Expression de la constante de torsion J.

Pour nous conformer aux notations ordinaires employées par les ingénieurs, nous poserons : $\mu = G$ (coefficient d'élasticité au cisaillement) et :

$$\boxed{J = \frac{4\,\Omega^2}{\int_\Gamma \frac{ds}{\varepsilon}}}$$

J étant un coefficient ayant les mêmes dimensions qu'un moment d'inertie.

La formule donnant l'angle de torsion devient alors :

$$\theta = \frac{M_{oz}}{G\,J}\,z\,.$$

15. — Identité de la constante de torsion J et du moment d'inertie polaire pour un tube rond.

On peut vérifier la formule de J sur un tube rond de mince épaisseur; dans ce cas, en effet, J doit être égal au moment d'inertie polaire qui a pour expression, si nous appelons D le diamètre et ε l'épaisseur que nous supposerons constante :

$$I_0 = \frac{\pi\,D^3\,\varepsilon}{4}\,.$$

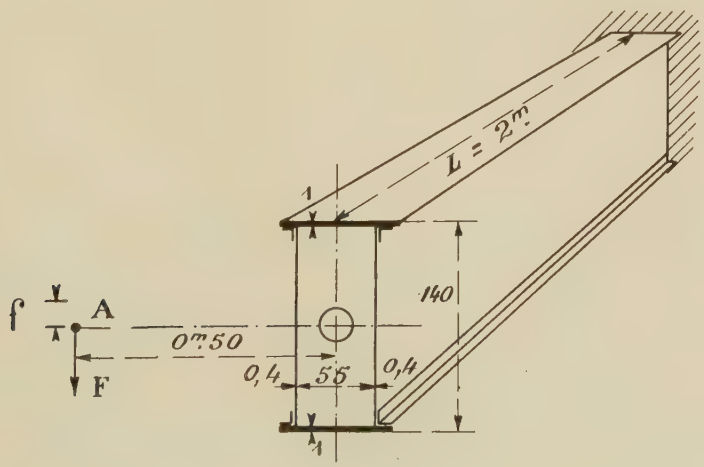
Si nous appliquons la formule, on trouve :

$$J = \frac{4\left(\frac{\pi\,D^2}{4}\right)^2}{\frac{1}{\varepsilon}\,\pi\,D} = \frac{\pi\,D^3\,\varepsilon}{4}\,.$$

On retrouve donc bien la formule donnant le moment d'inertie polaire.

16. — Vérification expérimentale.

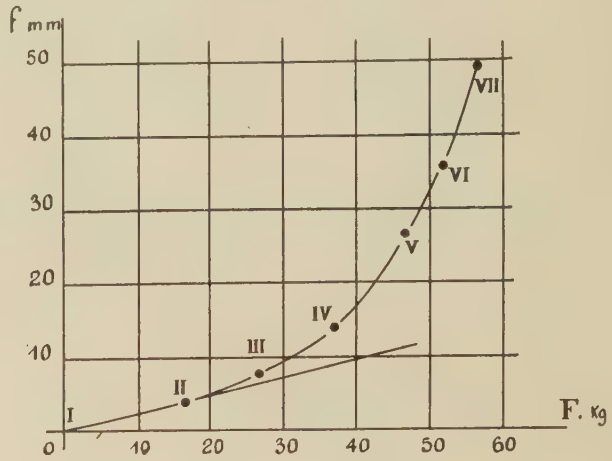
Nous avons également contrôlé la formule en exécutant un essai sur un prisme creux de mince épaisseur, dont la section transversale était rectangulaire et avait les dimensions qui sont indiquées sur la *figure* ci-dessous.



La poutre était en acier et avait une longueur de 2 mètres; elle était encastrée d'un côté et de l'autre elle était soumise à une charge F agissant à l'extrémité d'un levier de

0 m. 50; un tourillon, placé de ce même côté, permettait à la poutre de tourner autour de son axe, mais empêchait tout abaissement ou déplacement. Les flèches étaient relevées en A, leurs valeurs en fonction de la charge sont indiquées dans le tableau ci-dessous.

	F kg.	f mm.
I	0	0
II	16,5	4
III	26,5	8
VI	36,5	13,5
V	46,6	26,5
VI	51,5	35,5
VII	56,5	49,5



Ces résultats se traduisent graphiquement par la courbe ci-dessus.
Dans le cas qui nous occupe, nous avons :

$$2\,\Omega = 140 \times 55 \times 2 = 15.400$$
$$4\,\Omega^2 = (2\,\Omega)^2 = 15.400^2 = 237.160.000$$

et :

$$\int_\Gamma \frac{ds}{\varepsilon} = \frac{140 \times 2}{0,4} + \frac{55 \times 2}{1} = 810\ .$$

on a donc :

$$J = \frac{237.160.000}{810} = 292.790\ .$$

Le moment d'inertie polaire était de :

$$I_0 = I_x + I_Y = 1.032.000 + 184.950 = 1.216.950\ .$$

Le rapport $\lambda = \frac{J}{I_0}$, rapport qui peut caractériser la valeur de la section transversale au point de vue torsion est ici de :

$$\lambda = \frac{292.790}{1.216.950} = \frac{1}{4,15} = 0,24\ .$$

Si nous considérons le premier point donné par l'essai (repère II); point où l'on peut supposer que les déformations n'ont pas dépassé la limite élastique de la matière, on a :

$$M_{oz} = 16,5 \times 500 = 8.250 \qquad \theta = \frac{4}{500} = 0,008$$

donc :

$$0,008 = \frac{8.250 \times 2.000}{G \times 292.790}$$

on tire de là :

$$G = \frac{8.250 \times 2.000}{0,008 \times 292.790} = 7.050$$

ce qui correspond à :

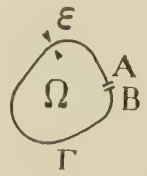
$$E = \frac{7.050}{0,385} = 18.300 .$$

Valeur normale pour une poutre en acier composée d'éléments assemblés. L'essai vérifie donc la formule de J , ainsi que l'hypothèse qui a servi de base à tous les calculs qui précèdent.

17. — Déplacement relatif de deux points contigus d'un cylindre fendu suivant une génératrice.

Avant de terminer, nous allons nous occuper du cas, qui peut peut-être trouver des applications intéressantes, où le cylindre creux de mince épaisseur est fendu suivant une génératrice; la section transversale est donc une section ouverte, mais les deux points A et B sont infiniment rapprochés.

Nous avons vu que pour les sections ouvertes et pour une torsion pure T est constamment nul et qu'on avait (page 23) :



$$\frac{dw}{ds} + \frac{\partial r}{\partial z} = 0$$

ou en revenant aux anciennes notations :

$$\frac{dw}{ds} + \frac{\partial v}{\partial z}\alpha - \frac{\partial u}{\partial z}\beta = 0$$

ou encore :

$$\frac{dw}{ds} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dx}{ds} = 0$$

en remplaçant $\frac{\partial v}{\partial z}$ et $\frac{\partial u}{\partial z}$ par leur valeur (page 24) :

$$\frac{dw}{ds} + \frac{\eta}{E} k_1 \left(x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds}\right) - \frac{\eta}{E} k_1 \left(x_0 \frac{dy}{ds} - y_0 \frac{dx}{ds}\right) = 0 .$$

Si maintenant nous multiplions par ds et que nous intégrons le long du contour entier Γ , il vient :

$$\int_\Gamma \frac{dw}{ds} ds + \frac{\eta}{E} k_1 \int_\Gamma \left(x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds}\right) ds - \frac{\eta}{E} k_1 \int_\Gamma \left(x_0 \frac{dy}{ds} - y_0 \frac{dx}{ds}\right) ds = 0$$

ou :

$$w_B - w_A = - \frac{\eta}{E} k_1 \, 2\,\Omega$$

car, comme nous l'avons déjà vu :

$$\int_\Gamma (x\,dy - y\,dx) = 2\,\Omega \qquad \text{et} \qquad \int_\Gamma (x_0\,dy - y_0\,dx) = 0 .$$

Si nous imprimons à l'extrémité du cylindre creux de longueur $z = L$ une rotation θ nous avons :

$$\theta = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\eta}{E} k_1 z = \frac{\eta}{E} k_1 L$$

d'où :

$$k_1 = \frac{\theta}{L} \frac{E}{\eta}$$

et en remplaçant k_1 par cette valeur :

$$w_B - w_A = -\frac{\theta}{L} 2\,\Omega$$

ou en multipliant par -1 :

$$\boxed{w_A - w_B = \frac{\theta}{L} 2\,\Omega}$$

Donc, quand un cylindre creux de mince épaisseur, de longueur L et de section droite Ω, est soumis à une torsion θ, les points A et B se déplacent l'un par rapport à l'autre d'une quantité donnée par la formule ci-dessus.

Inversement, si les points A et B se déplacent d'une quantité $w_A - w_B$ l'extrémité du cylindre creux tourne d'une quantité θ. C'est en somme la transformation d'un mouvement rectiligne en mouvement rotatif et inversement.

Nous avons exécuté un essai sur un tube circulaire ayant un diamètre de 24 mm. 6 et une longueur de 1.600 mm., nous lui avons fait subir une rotation de deux tours et avons mesuré un déplacement relatif des deux points A et B de 7 mm. 2.

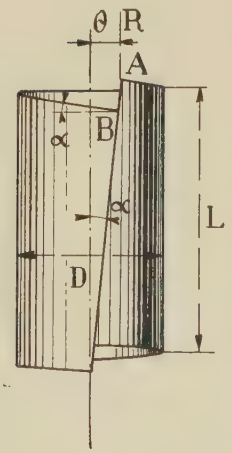
Appliquons la formule, nous avons :

$$\theta = 4\,\pi \qquad L = 1.600 \qquad \Omega = 475 \text{ mm}^2$$

d'où :

$$w_A - w_B = \frac{4\,\pi \times 2 \times 475}{1.600} = 7 \text{ mm. } 44 \,.$$

La différence entre la valeur du déplacement donné par l'essai et celle que nous trouvons par la formule est absolument négligeable; cette différence est d'ailleurs imputable au tube qui n'était pas rigoureusement cylindrique.



L'hypothèse du début est donc de nouveau vérifiée par cet essai.

Dans le cas d'un tube rond, on peut retrouver la formule donnant le déplacement des deux points A et B de la façon suivante.

La torsion qui est imprimée à l'extrémité du tube revient à supposer que la feuille qui le constitue est enroulée sur le cylindre en l'inclinant d'un angle α par rapport à l'axe.

On a alors :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\theta\, R}{L}$$

et :

$$w_A - w_B = \frac{\theta\, R}{L}\, \pi\, D = \frac{\theta}{L} \frac{\pi\, D^2}{2}$$

enfin :

$$w_A - w_B = \frac{\theta}{L}\, 2\, \frac{\pi\, D^2}{4} = \frac{\theta}{L}\, 2\,\Omega \,.$$

CHAPITRE IV

RECHERCHE de l'APPROXIMATION de la FORMULE DONNANT J pour les GRANDES ÉPAISSEURS

17'. — Hypothèse faite pour appliquer la formule aux sections pleines.

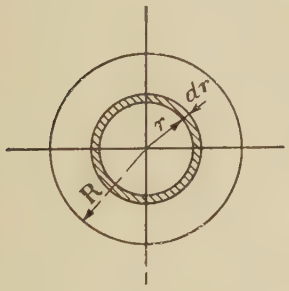
On peut se demander ce que devient la formule donnant la constante de torsion $J = \dfrac{4\,\Omega^2}{\int \dfrac{ds}{\varepsilon}}$ pour les grandes épaisseurs; aussi pour nous permettre de connaître son degré d'approximation nous l'appliquerons aux poutres prismatiques dont la section transversale est pleine. Il est évident que nous trouverons, par rapport aux valeurs données par la solution de Saint-Venant, des différences qui pourront être appréciables, mais qui ne seront pas, dans les cas les plus défavorables, supérieures à 20 %.

Pour l'appliquer, nous supposerons que la poutre est constituée par une série de prismes creux indépendants les uns des autres à la façon d'un système télescopique et dont les sections droites sont homothétiques et ont une épaisseur très petite ε.

L'erreur que nous commettrons ainsi sera positive, c'est-à-dire que la valeur de J que nous obtiendrons par la formule sera approchée par défaut. En effet, par cette hypothèse nous imposons aux lignes de forces de l'effort tranchant une forme qui est homothétique du contour extérieur; tandis qu'en réalité, vers le centre, les lignes de forces se rapprochent de la forme circulaire qui est, comme nous l'avons vu, la meilleure au point de vue torsion.

L'erreur reste néanmoins très petite, car la forme que nous imposons aux lignes de forces est exacte pour les fibres situées près du contour extérieur, lesquelles donnent précisément la partie prépondérante de la constante de torsion.

18. — Calcul de J pour la section circulaire.



Pour une couronne d'épaisseur dr et de rayon r, on a :

$$d\,J = \frac{4\,\Omega^2}{\int_\Gamma \dfrac{ds}{\varepsilon}} = \frac{4\,\pi^2\,r^4}{2\,\pi\,r}\,dr = 2\,\pi\,r^3\,dr\,,$$

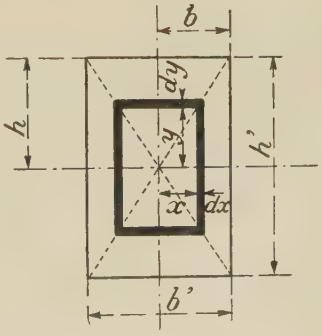
d'où :

$$J = \int_0^R 2\,\pi\,r^3\,dr = \frac{\pi\,R^4}{2} = \frac{\pi\,D^4}{32}$$

c'est la formule exacte.

19. — Calcul de J pour la section rectangulaire.

Pour l'élément rectangulaire dont les côtés sont $2x$ et $2y$ et l'épaisseur dx et dy, on a :



$$d\,J = \frac{4\,\Omega^2}{\int_\Gamma \dfrac{ds}{\varepsilon}} = \frac{4 \times 16\,x^2\,y^2}{4\left(\dfrac{x}{dy} + \dfrac{y}{dx}\right)} = \frac{16\,x^2\,y^2}{x\,dx + y\,dy}\,dx\,dy$$

mais :

$$y = \frac{h}{b}\,x \qquad \text{d'où} \qquad dy = \frac{h}{b}\,dx$$

donc :

$$d\,J = \frac{16\,x^2\,\frac{h^2}{b^2}\,x^2\,\frac{h}{b}\,dx\,dx}{x\,dx + \frac{h^2}{b^2}\,x\,dx} = \frac{16\,x^4\,h^3}{b\,(b^2+h^2)\,x}\,dx$$

et enfin :

$$d\,J = \frac{16\,x^3\,h^3}{b\,(b^2+h^2)}\,dx\ .$$

Pour le rectangle complet :

$$J = \int_0^b \frac{16\,x^3\,h^3}{b\,(b^2+h^2)}\,dx = \left|\frac{4\,x^4\,h^3}{b\,(b^2+h^2)}\right|_0^b = \frac{4\,b^3\,h^3}{b^2+h^2}\ ,$$

ou en remplaçant b par $\frac{b'}{2}$ et h par $\frac{h'}{2}$,

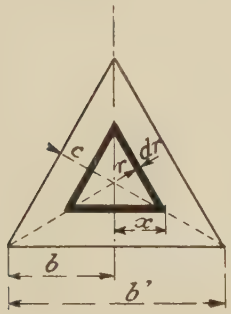
$$\boxed{J \quad \frac{1}{4}\,\frac{b'^3\,h'^3}{b'^2+h'^2}}\ .$$

d'après Bach (Hütte 24 Auflage) :

$$J = \frac{1}{3.6}\,\frac{b'^3\,h'^3}{b'^2+h'^2}$$

on trouverait donc dans ce cas une erreur de 10 %.

20. — Calcul de J pour la section triangulaire (triangle équilatéral).



$$d\,J = \frac{4\,\Omega^2}{\int_\Gamma \frac{ds}{\varepsilon}}$$

$$\Omega = \frac{2\,x\,2\,x\sqrt{3}}{2\times 2} = x^2\sqrt{3}$$

donc :

$$d\,J = \frac{4\,x^4\,3}{6\,x}\,\varepsilon = 2\,x^3\,\varepsilon = 2\,x^3\,dr$$

mais, on a :

$$r = \frac{2\,x\sqrt{3}}{2\times 3} = \frac{x\sqrt{3}}{3}$$

d'où :

$$dr = dx\,\frac{\sqrt{3}}{3}$$

il vient donc :

$$d\,J = 2\,x^3\,dx\,\frac{\sqrt{3}}{3}$$

et

$$J = \int_0^b x^3\,dx\,\frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\frac{b^4}{4} = \frac{\sqrt{3}}{6}\,b^4$$

posons $b = \frac{b'}{2}$, il vient :

$$\boxed{J = \frac{\sqrt{3}}{6}\,\frac{b'^4}{16} = \frac{1}{55.5}\,b'^4}$$

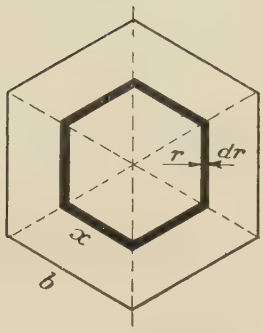
La formule exacte serait :

$$J = \frac{1}{46,2} b'^4$$

Soit une erreur de 20 % environ.

21. — Calcul de J pour la section hexagonale.

Dans ce cas :



$$\Omega = \frac{x\,r}{2} \times 6$$

mais $r = \frac{\sqrt{3}}{2} x$

$$\Omega = \frac{\sqrt{3} \times 6}{4} x^2$$

$$d\,J = \frac{4\,x^4 \times 3 \times 36 \times dr}{16 \times 6\,x}$$

dr a pour expression :

$$dr = \frac{\sqrt{3}}{2} dx$$

d'où :

$$d\,J = \frac{4\,x^4 \times 3 \times 36 \times \sqrt{3}\,dx}{16 \times 6\,x \times 2} = \frac{36}{16}\,x\,\sqrt{3}\,dx$$

et :

$$J = \int_0^b \frac{36}{16} \sqrt{3}\,.\,x^3\,dx = \frac{36 \times \sqrt{3}}{16 \times 4} b^4 = \frac{b^4}{1.025}\,.$$

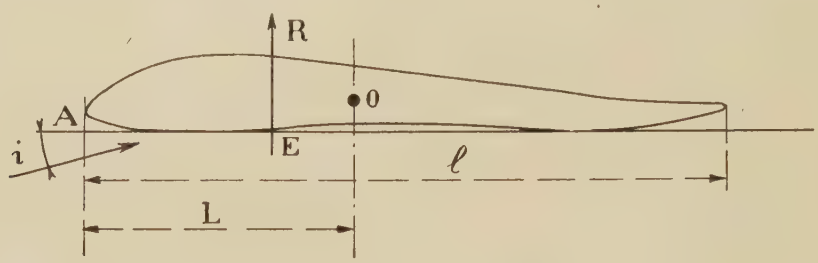
La formule exacte serait : $J = \frac{b^4}{0,962}$ soit une erreur de 6,3 %.

DEUXIÈME PARTIE

L'instabilité des ailes d'avions aux grandes vitesses

22. — Expresssion du moment en fonction de l'incidence.

Avant de mettre en évidence la vitesse critique, considérons le profil ci-contre. Soit R la résultante en forces aérodynamiques agissant sur l'aile de surface S et appelons V la



vitesse de déplacement. Le moment des forces aérodynamiques par rapport au bord d'attaque A a pour expression :

$$M_A = C_m \, l \, S \, \frac{a \, V^2}{2 g}$$

a étant la densité de l'air et g l'accélération due à la pesanteur.

C_m est un coefficient sans dimension qui, pour un profil donné, ne dépend que de l'incidence.

On peut encore écrire :

$$M_A = R \, \overline{AE} = C_z \, S \, \frac{a \, V^2}{2 g} \, \overline{AE} \, ,$$

car :

$$R = C_z \, S \, \frac{a \, V^2}{2 g} \, ,$$

C_z étant un coefficient sans dimension qui ne dépend également, pour un profil donné, que de l'incidence.

Par rapport à un point quelconque O , le moment a pour expression :

$$M_0 = R \, (L - AE)$$

ou encore d'après les équations qui précèdent :

$$M_0 = C_z \, S \, \frac{a \, V^2}{2 g} \, L - C_z \, S \, \frac{a \, V^2}{2 g} \, \overline{AE}$$

ou :

$$M_0 = C_z \, S \, \frac{a \, V^2}{2 g} \, L - C_m \, l \, S \, \frac{a \, V^2}{2 g}$$

enfin :

$$M_0 = [C_z L - C_m l] S \frac{a V^2}{2g} .$$

Telle est l'expression du moment des forces par rapport au point O .

Nous allons voir que ce moment est une fonction linéaire de l'incidence; pour cela, il suffit de démontrer que $\frac{dM_0}{di} = \text{Cte}$.

Dérivons donc par rapport à i , il vient :

$$\frac{dM_0}{di} = \left[\frac{dC_z}{di} L - \frac{dC_m}{di} l\right] S \frac{a V^2}{2g}$$

ou encore en se rappelant que :

$$\frac{dC_m}{di} = \frac{dC_m}{dC_z} \frac{dC_z}{di} ,$$

il vient :

$$\frac{dM_0}{di} = \left[L - \frac{dC_m}{dC_z} l\right] \frac{dC_z}{di} S \frac{a V^2}{2g}$$

Or, pour tous les profils, les dérivés $\frac{dC_m}{dC_z}$ et $\frac{dC_z}{di}$ sont, dans la zone d'utilisation, des constantes; ces constantes varient très peu d'un profil à l'autre et, généralement, on a (i étant exprimée en degrés) :

$$\frac{dC_m}{dC_z} = 0{,}25 \qquad \text{et} \qquad \frac{dC_z}{di} = 0{,}07 .$$

Si i était exprimée en radians, on aurait :

$$\frac{dC_z}{di} = 0{,}07 \times \frac{180}{\pi} ,$$

on a donc :

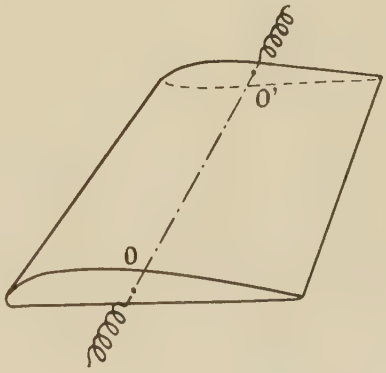
$$\frac{dM_0}{di} = [L - 0{,}25\, l]\, 0{,}07\, S \frac{a V^2}{2g} = K ,$$

l'expression du moment est donc de la forme :

$$M_0 = m + K i ,$$

la valeur de K étant celle qui est indiquée plus haut.

23. — Instabilité d'une aile rigide reliée à un système élastique en torsion.



Pour bien mettre en évidence la vitesse critique, considérons d'abord le cas très simple, qui n'est évidemment jamais réalisé, d'une aile absolument rigide dont l'axe de rotation serait $o\,o'$ et qui serait reliée à un système élastique, par exemple un ressort de torsion, remplissant la condition :

$$M = k\theta$$

Si l'on prend même origine pour i et θ , on a $i = \theta$ d'autre part pour qu'il y ait équilibre, il faut qu'il y ait égalité entre le moment dû aux actions aérodynamiques et le moment élastique antagoniste, de sorte que :

$$m + K\theta = k\theta$$

d'où :

$$\theta = \frac{m}{(k - K)} ,$$

on voit donc que θ devient infini pour $K = k$; c'est cette valeur de K qui donne la vitesse critique.

Le problème que nous venons de traiter serait rigoureusement celui d'une aile placée dans un tunnel et reliée élastiquement à des supports rigides. Il est clair que rien ne serait changé, quant à la vitesse critique, si on suppose que les supports sont mobiles, mais ont une inertie considérable par rapport à celle de l'aile. Ce dernier cas est exactement comparable à celui d'un avion en vol, car, en général, la masse de l'aile est très petite eu égard à celle de l'avion.

Comme nous l'avons fait remarquer dans la préface, à partir de la vitesse critique une rotation θ autour de l'axe $o\,o'$ entraîne une variation du moment des forces aérodynamiques autour du même axe, variation qui est plus grande que celle du système élastique antagoniste.

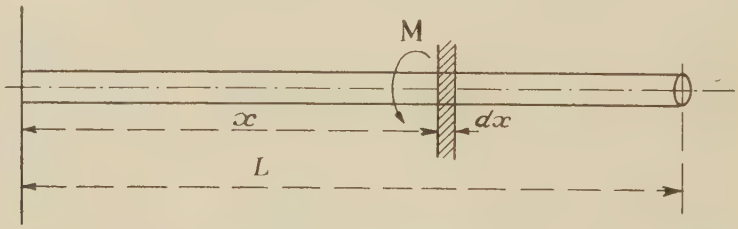
Nous allons maintenant envisager deux problèmes de la plus haute importance; ce sera la recherche de la vitesse critique pour un monoplan avec ailes en porte à faux :

1° Dans le cas d'une aile avec poutre formant caisson.

2° Dans le cas d'une aile à deux longerons.

24. — Recherche de la vitesse critique d'un monoplan avec ailes en porte-à-faux constituées par une poutre unique formant caisson.

Considérons une aile rectangulaire encastrée sur un fuselage; nous supposerons que la masse de l'aile est négligeable eu égard à celle de l'avion et nous admettrons, pour ne pas compliquer inutilement les calculs, que la poutre est de section constante.



On a d'abord la relation fondamentale relative à une poutre soumise à un moment de torsion M :

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{GJ} \tag{1}$$

θ étant l'angle de rotation.

G le coefficient d'élasticité au cisaillement.

J un coefficient ayant les dimensions d'un moment d'inertie et dont nous avons donné l'expression dans la première partie de notre thèse pour le cas où la poutre est constituée par un prisme creux de mince épaisseur.

Nous avons vu que l'expression du moment était de la forme :

$$M = m + K_i ,$$

ou en prenant la nouvelle notation :

$$M = m + K\,\theta .$$

Si nous considérons un élément d'aile dx, la variation du moment dM a pour expression :

$$dM = \xi\,\theta\,dx\ .$$

Nous supposons que le terme m est nul, il suffit pour cela de choisir convenablement l'origine.

$l\,dx$ représente la surface de l'élément d'aile dx, donc :

$$\xi = [L - 0{,}25\,l]\,0{,}07\,\frac{a\,V^2}{2g}\,l\,\frac{180}{\pi}\ ,$$

l étant, comme nous l'avons déjà vu, la profondeur de l'aile.

Nous pouvons donc écrire :

$$\frac{dM}{dx} = -\xi\,\theta\ , \tag{2}$$

nous prenons le signe $-$, car le moment diminue quand x croît.

En dérivant l'équation (1) par rapport à x, on a :

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{1}{GJ}\,\frac{dM}{dx}$$

ou en tenant compte de (2) :

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = -\frac{\xi}{GJ}\,\theta\ ,$$

posons :

$$\frac{\xi}{GJ} = \mu^2\ ,$$

on pourra écrire :

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \mu^2\,\theta = 0\ ,$$

l'intégrale générale de cette équation différentielle a pour expression :

$$\theta = A \sin \mu\,x + B \cos \mu\,x$$

A et B étant deux constantes.

Pour les déterminer, nous écrirons que pour $x = 0$ $\theta = \theta_0$, d'où $B = \theta_0$; enfin pour $x = L$ $M = 0$, d'où :

$$\left|\frac{d\theta}{dx}\right|_L = 0 \qquad \text{ou} \qquad A\,\mu \cos \mu\,L - \theta_0\,\mu \sin \mu\,L = 0\ ,$$

on tire de là :

$$A = \frac{\theta_0 \sin \mu\,L}{\cos \mu\,L}$$

pour $\cos \mu\,L = 0$ A devient infini, l'aile devient instable.

La condition d'instabilité est donc donnée par la formule :

$$\mu\,L = \frac{\pi}{2}\ ,$$

ou en élevant au carré et en remplaçant μ^2 par sa valeur :

$$\boxed{\frac{\xi}{GJ}\,L^2 = \frac{\pi^2}{4}}$$

25. — Constance de la vitesse critique pour des avions homothétiques.

Cette formule met en évidence une particularité remarquable : *des avions homothétiques ont même vitesse critique.*

En effet, supposons que toutes les dimensions d'un avion soient multipliées par λ, la surface et donc la charge sont multipliées par λ^2 ; les moments fléchissants qui sont de la forme PL sont donc multipliés par λ^3 et pour avoir le même taux de travail dans la poutre, il suffira de multiplier toutes ses dimensions par λ.

La condition d'instabilité qui était :

$$\frac{\xi}{GJ} L^2 = \frac{\pi^2}{4} .$$

devient :

$$\frac{\xi \lambda^2 L^2 \lambda^2}{GJ \lambda^4} = \frac{\pi^2}{4}$$

car J a les dimensions d'un moment d'inertie; donc le rapport n'est pas changé et la vitesse critique reste la même.

26. — Application numérique.

Soit un grand monoplan d'allongement 8, ayant 20 mètres d'envergure et 2 m. 50 de profondeur d'aile et supposons que les conditions de résistance nous obligent à mettre l'axe de la poutre caisson à 0 m. 90 du bord d'attaque. Proposons nous de rechercher la valeur de J pour que la vitesse critique soit de 500 km./h. Bien entendu, pour un avion la valeur de J devrait être déterminée en tenant compte des conditions de résistance et de vitesse critique. Nous ne nous occuperons que de cette dernière condition.

On a :

$$\xi = [0{,}90 - 0{,}25 \times 2{,}5] \times 0{,}07 \times \frac{180}{\pi} \times 139^2 \times \frac{1}{16} \times 2'5 ,$$

car :

$$V = \frac{500}{3{,}6} = 139 \frac{m}{1''} \qquad \text{et} \qquad \frac{a}{2g} = \frac{1}{16}$$

on trouve :

$$\xi = 3.330 \text{ kg.}$$

Si le matériau choisi est le duralumin $G = 2.700$ kg./mm², on a donc en prenant comme unité le millimètre :

$$\frac{3.330 \times 10.000^2}{2.700 \times J} = \frac{\pi^2}{4} ,$$

d'où :

$$J = \frac{3.330 \times 10.000^2 \times 4}{2.700 \times \pi^2} = 50.000.000^{mm^4} ,$$

ce qui correspond, pour fixer les idées, à un tube de duralumin de 200 mm. de diamètre et 8 mm. d'épaisseur, ou encore à un tube de 400 mm. de diamètre et 1 mm. d'épaisseur. On voit, par cet exemple, que la condition de vitesse critique conduit déjà à des dimensions de poutre considérables.

Remarquons avant de terminer ce problème que J est indépendant de l'allongement; en effet, on peut écrire :

$$\xi = \alpha l^2$$

en posant :

$$\alpha = \left[\frac{L}{l} - 0{,}25\right] 0{,}07 \; \frac{a\,V^2}{2g} \; \frac{180}{\pi}$$

la condition d'instabilité devient :

$$\frac{\alpha\, l^2\, L^2}{G\,J} = \frac{\pi^2}{4} \; ,$$

mais $l\,L = \frac{S}{2}$ S étant la surface totale du monoplan, d'où la condition :

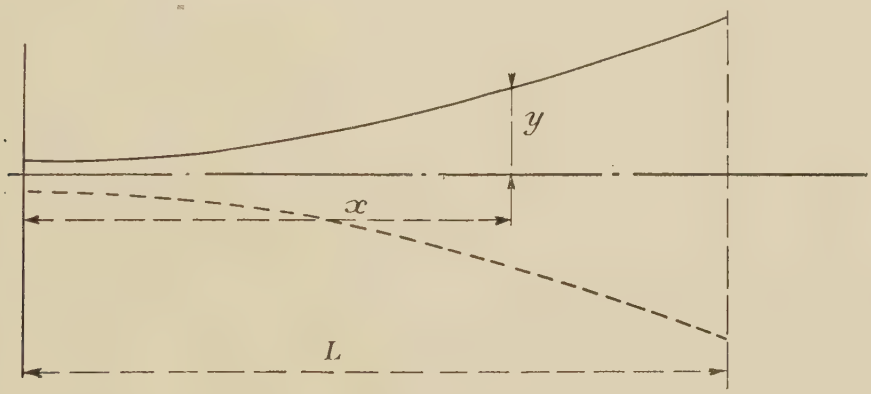
$$\boxed{\frac{\alpha\, S^2}{G\,J} = \pi^2}$$

et l'on voit immédiatement que J , pour une vitesse critique donnée, ne dépend que de la surface .

Lorsque la poutre-caisson est de section variable, on peut considérer la section moyenne pour le calcul de la vitesse critique; dans ce cas, la formule ne donne qu'une approximation et il vaut mieux employer une méthode graphique identique à celle que nous indiquons plus loin à propos des ailes à deux longerons de section variable.

27. — Recherche de la vitesse critique d'un monoplan avec ailes en porte-à-faux constituées par deux longerons identiques.

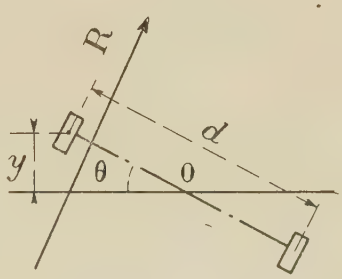
Comme plus haut, nous considérerons une aile rectangulaire, encastrée sur un fuselage; nous supposerons également que la masse de l'aile est négligeable eu égard à celle de l'avion et que la section des longerons est constante.



Nous partons cette fois de la relation fondamentale :

(3) $$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{E\,I} \; ,$$

M étant le moment de flexion sur un longeron.
E le coefficient d'élasticité.
I le moment d'inertie.



D'autre part, si nous appelons p la charge sur un longeron par unité de longueur, on a :

(4) $$\frac{d^2 M}{d\,x^2} = p \; .$$

mais $p = \frac{m_t}{d}$

m_t étant le moment de torsion par unité de longueur et d la distance des deux longerons.

Enfin : $m_t = \xi\,\theta$.

ξ ayant la même expression que dans le problème précédent.

On peut donc écrire :

$$p = \frac{\xi\,\theta}{d} \ .$$

Puisque nous supposons que les deux longerons sont identiques, on a :

$$\theta = \frac{y}{\frac{d}{2}} \qquad \text{d'où} \qquad p = \frac{2\,\xi}{d^2}\,y = \xi'\,y \ ,$$

en posant :

$$\xi' = \frac{2\,\xi}{d^2} \ .$$

L'hypothèse de l'identité des deux longerons revient à admettre que l'axe autour duquel tourne l'aile est équidistant des deux longerons.

Plus généralement, le point O est le centre de rotation du système élastique qui constitue la structure de l'aile; c'est le point autour duquel tourne le profil sous l'influence d'un moment de torsion. Une résultante R appliquée en O ne provoque aucune torsion de l'aile, mais simplement un déplacement; c'est donc par rapport à ce point qu'il faut considérer le moment des forces aérodynamiques.

L'expression de ξ' peut s'écrire :

$$\xi' = [\mathrm{L} - 0{,}25\,l]\,0{,}07 \times \frac{180}{\pi}\,\frac{a\,\mathrm{V}^2}{2\,g}\,\frac{2\,l}{d^2}$$

ou encore :

$$\xi' = \left[\frac{\mathrm{L}}{l} - 0{,}25\right] 0{,}07 \times \frac{180}{\pi}\,\frac{a\,\mathrm{V}^2}{2\,g}\,\frac{2\,l^2}{d^2} \ ,$$

et enfin :

$$\xi' = \alpha\,\frac{2\,l^2}{d^2} \ ,$$

α ayant la même expression que dans le problème précédent.

En tenant compte de la valeur de p , l'équation (4) peut s'écrire :

$$\frac{d^2\,\mathrm{M}}{dx^2} = \xi'\,y \ . \tag{5}$$

Dérivons deux fois l'équation (3) par rapport à x , il vient :

$$\frac{d^4\,y}{dx^4} = \frac{1}{\mathrm{E\,I}}\,\frac{d^2\,\mathrm{M}}{dx^2} \ ,$$

et en tenant compte de (5) :

$$\frac{d^4\,y}{dx^4} = \frac{\xi'}{\mathrm{E\,I}}\,y \ ,$$

posons :

$$\frac{\xi'}{\mathrm{E\,I}} = \lambda^4 \ ,$$

on pourra écrire alors :

$$\frac{\partial^4\,y}{\partial x^4} - \lambda^4\,y = 0 \ .$$

L'équation caractéristique de cette équation différentielle linéaire a pour racines :

$$+\lambda . \qquad -\lambda . \qquad +i\lambda . \qquad \text{et} \qquad -i\lambda .$$

l'intégrale générale est donc de la forme :

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x} + C_3 e^{i\lambda x} + C_4 e^{-i\lambda x} ,$$

C_1, C_2, C_3 et C_4 étant quatre constantes à déterminer, on peut encore écrire :

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x} + A \sin \lambda x + B \cos \lambda x ,$$

A et B étant deux nouvelles constantes.

Pour déterminer les quatre constantes, nous écrirons pour que $x = 0$ $y = y_0$ et, puisque nous supposons les longerons encastrés, pour $x = 0$ $\frac{dy}{dx} = 0$.

Ensuite, nous écrirons que pour $x = L$ $M = 0$.

A l'extrémité de l'aile, l'effort tranchant est nul; on a donc pour $x = L$ $T = 0$ ou $\frac{dM}{dx} = 0$. Soient quatre équations à quatre inconnues.

Nous avons donc pour $x = 0$ $y = y_0$, ou :

I $$\boxed{y_0 = C_1 + C_2 + B}$$

La tangente à la ligne élastique a pour expression :

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \lambda e^{\lambda x} - C_2 \lambda e^{-\lambda x} + A \lambda \cos \lambda x - B \lambda \sin \lambda x$$

pour $x = 0$ $\frac{dy}{dx} = 0$, donc :

II $$\boxed{0 = C_1 - C_2 + A}$$

pour $x = L$ $M = 0$, donc : $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$,

or, on a :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = C_1 \lambda^2 e^{\lambda x} + C_2 \lambda^2 e^{-\lambda x} - A \lambda^2 \sin \lambda x - B \lambda^2 \cos \lambda x ,$$

et pour $x = L$:

III $$\boxed{0 = C_1 e^{\lambda L} + C_2 e^{-\lambda L} - A \sin \lambda L - B \cos \lambda L}$$

D'autre part, l'effort tranchant est nul à l'extrémité de l'aile et l'on sait que $T = \frac{dM}{dx}$ donc :

$$\frac{dM}{dx} = 0 = \frac{d^3 y}{dx^3} \qquad \text{pour} \qquad x = L$$

$\frac{d^3 y}{dx^3}$ a pour expression :

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = C_1 \lambda^3 e^{\lambda x} - C_2 \lambda^3 e^{-\lambda x} - A \lambda^3 \cos \lambda x + B \lambda^3 \sin \lambda x$$

pour $x = L$:

IV $$\boxed{0 = C_1 e^{\lambda L} - C_2 e^{-\lambda L} - A \cos \lambda L + B \sin \lambda L}$$

L'instabilité a lieu quand les constantes C_1 C_2 A et B , qui sont ici des inconnues, deviennent infinies; la condition d'instabilité s'obtiendra donc en écrivant que le déterminant des inconnues est nul, ou :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ e^{\lambda L} & e^{-\lambda L} & -\sin \lambda L & -\cos \lambda L \\ e^{\lambda L} & -e^{-\lambda L} & -\cos \lambda L & \sin \lambda L \end{vmatrix} = 0$$

Tous calculs faits, on trouve :

$$\Delta = 4 + 2\,(e^{\lambda L} + e^{-\lambda L}) \cos \lambda L \ .$$

La condition d'instabilité s'écrit donc :

$$4 + 2\,(e^{\lambda L} + e^{-\lambda L}) \cos \lambda L = 0 \ ,$$

ou :

$$1 + \frac{(e^{\lambda L} + e^{-\lambda L})}{2} \cos \lambda L = 0 \ ,$$

on peut encore écrire en remarquant que :

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = ch\, x \ ,$$

$$\boxed{1 + ch\, \lambda L \cos \lambda L = 0} \ .$$

Le symbole *ch* représentant le cosinus hyperbolique. On tire de l'équation ci-dessus :

$$\lambda L = 1.875$$

en élevant à la quatrième puissance et en remplaçant λ par sa valeur, on obtient :

$$\boxed{\frac{\xi'}{E\,I} L^4 = 12.36} \ .$$

On peut encore écrire en multipliant haut et bas par l^2 :

$$\frac{\xi'\, l^2\, L^2}{E\,I} \frac{L^2}{l^2} = 12.36 \ ,$$

mais :

$$l\,L = \frac{S}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{L}{l} = \frac{\gamma}{2} \ ,$$

γ étant l'allongement; de sorte qu'on a :

$$\frac{\xi'\, S^2\, \gamma^2}{16\, E\,I} = 12.36$$

ou :

$$\boxed{\frac{\xi'\, S^2\, \gamma^2}{E\,I} = 197{,}76} \ .$$

Telle est la condition d'instabilité d'une aile à deux longerons de section constante. Elle met en évidence, comme dans le cas de l'aile avec poutre-caisson, la constance de la vitesse critique pour des avions homothétiques.

28. — Application numérique.

Si nous faisons une application numérique en prenant les mêmes caractéristiques que celles qui nous ont servi dans le problème précédent; en admettant de même que le centre de rotation de l'aile se trouve à 0 m. 90 du bord d'attaque et que la distance d des deux longerons est égale à 1 m. 30; on trouve :

$$\xi' = \frac{2 \times 3.330}{(1.3)^2} = 3.940 \text{ kg./m}^2 .$$

Si nous employons le duralumin $E = 7.000$ kg./mm² .

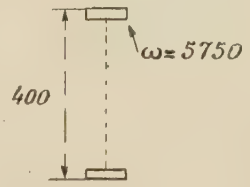
En prenant comme unité le millimètre, on a :

$$I = \frac{\xi' L^4}{12,36\ E} = \frac{0,003.940 \times 10.000^4}{12,36 \times 7.000} = 460.000.000 ,$$

ce qui correspond, pour fixer les idées, à un longeron de 400 mm. de hauteur et dont chaque semelle a une section de 5.750 mm².

Un tel longeron aurait un moment de résistance :

$$\frac{I}{v} = \frac{460.000.000}{200} = 2.300.000 ,$$



et pourrait supporter, en admettant un taux de travail de 30 kg./mm², un moment de :

$$M = \frac{2.300.000 \times 30}{1.000} = 69.000 \text{ kgm.}$$

ce qui correspond à une charge totale uniformément répartie de 13.800 kg.

On voit que la condition de vitesse critique peut conduire à des dimensions de charpente considérables.

29. — Conclusions.

En résumé, dans le premier problème la condition d'instabilité peut être mise sous la forme $\frac{\alpha S^2}{G J} = \pi^2$ et dans le second problème $\frac{\xi' S^2 \gamma^2}{E I} = 197,76$; α et ξ' étant deux coefficients ne dépendant que de la vitesse.

Dans le cas de la poutre-caisson, on voit que la condition d'instabilité est indépendante de l'allongement et, qu'au contraire, pour une aile à deux longerons l'allongement intervient au carré. Il semblerait donc que pour les grands allongements vers lesquels tendent les constructeurs la construction avec poutre-caisson fût indiquée.

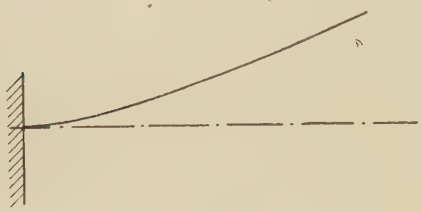
30. — Méthode graphique pour la recherche de l'instabilité.

Dans les deux problèmes que nous avons résolus, nous avons supposé que la section des longerons était constante; généralement cette condition n'est pas satisfaite. Il arrive aussi, particulièrement pour les avions devant avoir un plafond élevé et où l'on veut une cellule très légère, que l'aile est soutenue, de chaque côté du fuselage, par un ou plusieurs mâts. Les formules que nous avons trouvées ne s'appliquent évidemment pas aux deux cas que nous venons de signaler, et il est clair que si on ne veut pas tomber dans des difficultés mathématiques considérables, il faut avoir recours, pour le calcul de la vitesse critique, à une méthode graphique.

Cette méthode existe, aussi nous la décrirons très rapidement; c'est une méthode féconde, d'une simplicité remarquable et qui conduit à des résultats très rigoureux. Elle est très employée par les ingénieurs pour la détermination du flambement des pièces de grande longueur, de section variable, soumises à une compression. Nous l'avons employée

pour vérifier la condition d'instabilité d'une aile à deux longerons; et, après trois approximations successives, nous avons obtenu des résultats approchés à moins de 1 % près.

On suppose le longeron déformé suivant une courbe quelconque, mais cependant possible. Par exemple dans le cas d'une aile en porte à faux constituée par deux longerons, les courbes possibles seront celles qui passeront par le point d'encastrement; elles auront donc la forme indiquée ci-contre.

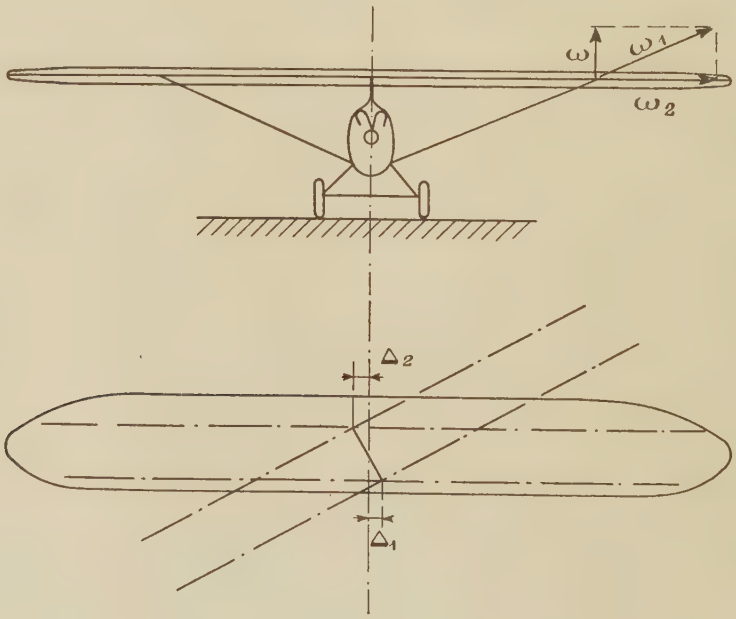


Connaissant les déformations, on peut évaluer les moments fléchissants et en déduire la ligne élastique du longeron. Si cette dernière courbe était proportionnelle à la première, la vitesse critique serait celle qui assurerait leur identité absolue.

Généralement, ces deux courbes ne sont pas proportionnelles; on aura cependant une valeur approchée de la vitesse critique en écrivant que les déformations moyennes ou maxima sont les mêmes.

La deuxième courbe est en fait plus approchée que la première de la courbe réelle de déformation; on pourra donc recommencer en partant de cette deuxième courbe. A la troisième approximation, on a généralement des courbes très voisines. Cette méthode est en somme l'application graphique du procédé d'intégration d'une équation différentielle par approximations successives.

L'instabilité, que nous avons supposée provenir de la déformation propre de l'aile, peut être provoquée par la déformation de la charpente à laquelle l'aile est attachée; ce sera, par exemple, le cas d'un monoplan dont les ailes sont soutenues par un ou deux mâts de chaque côté du fuselage et dont les points d'attaches à la cabane ne sont pas absolument rigides.



Tout déplacement relatif de ces deux points dans le plan de l'aile a pour effet de la gauchir, c'est-à-dire de lui faire subir une torsion dont l'axe est parallèle à l'envergure. En effet, aux déplacements Δ_1 et Δ_2 correspond une rotation de l'aile ω perpendiculaire à son plan et qui se décompose, au droit du mât, en deux rotations :

1° Une rotation des mâts ω_1 .

2° Une rotation ω_2 parallèle à l'envergure.

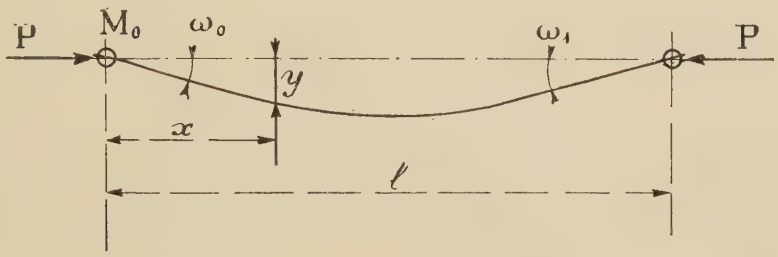
Le problème, comme on le voit, n'est, au fond, pas très différent de ceux que nous avons résolus.

TROISIÈME PARTIE

Flambement d'une poutre soumise à une compression et dont les encastrements sont élastiques

31. — Formule générale.

Nous nous proposons de rechercher la condition d'instabilité ou de flambement d'une barre soumise à la compression et dont les liaisons des extrémités répondent aux conditions



suivantes qui sont généralement celles de tout système élastique :

$$M_0 = k_0\,\omega_0 \qquad M_1 = -\,k_1\,\omega_1$$

M_0 et M_1 étant les moments au droit des appuis et k_0 et k_1 des constantes correspondant à chaque appui.

On partira de la relation fondamentale :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \tag{1}$$

M étant le moment de flexion.
E le coefficient d'élasticité.
I le moment d'inertie qu'on supposera constant.

D'autre part, on a :

$$M = M_0 + S_0\,x - P\,y + \mu\,(x)$$

M_0 et S_0 étant les composantes de la réaction complémentaire de l'appui de gauche et $\mu\,(x)$ le moment de la poutre supposée sur appuis simples et provenant des charges autres que la compression P .

Pour $x = l$ $y = 0$ $\mu\,(x) = 0$, d'où $M = M_1$, on a donc :

$$M_1 = M_0 + S_0\,l \qquad \text{et} \qquad S_0 = \frac{M_1 - M_0}{l}$$

Si nous remplaçons dans l'équation (1) M par sa valeur, il vient :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P}{EI}\,y = \frac{M_0}{EI} + \frac{S_0}{EI}\,x + \frac{\mu\,(x)}{EI}\ .$$

posons $\frac{P}{EI} = \alpha^2$, l'intégrale générale de cette équation différentielle est :

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + \frac{M_0}{P} + \frac{S_0 x}{P} + \varphi(x)$$

$\varphi(x)$ étant l'intégrale particulière de la fonction $\mu(x)$.

La tangente à la ligne élastique a pour expression :

$$\frac{dy}{dx} = A \alpha \cos \alpha x - B \alpha \sin \alpha x + \frac{S_0}{P} + \frac{d\varphi}{dx}$$

et le moment fléchissant :

$$M = EI \frac{d^2 y}{dx^2} .$$

or :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - A \alpha^2 \sin \alpha x - B \alpha^2 \cos \alpha x + \frac{d^2 \varphi}{dx^2} ,$$

donc :

$$M = - A P \sin \alpha x - B P \cos \alpha x + EI \frac{d^2 \varphi}{dx^2} .$$

Nous avons quatre inconnues à déterminer : A, B, M_0 et M_1 ; pour cela, nous écrirons que pour $x = 0$ $\frac{dy}{dx} = \omega_0$ et $M = M_0$ (appui de gauche), d'où :

$$\omega_0 = A \alpha + \frac{S_0}{P} + \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0 ,$$

mais d'après les conditions de liaisons $\omega_0 = \frac{M_0}{k_0}$,

d'autre part nous avons vu que $S_0 = \frac{M_1 - M_0}{l}$,

donc :

$$\frac{M_0}{k_0} = A \alpha + \frac{M_1 - M_0}{P l} + \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0 ,$$

ou encore :

$$\boxed{A \alpha + \frac{M_1}{P l} - M_0 \left(\frac{1}{P l} + \frac{1}{k_0}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0 = 0}$$

on a aussi $M = M_0$ ou :

$$M_0 = - B P + EI \left(\frac{d^2 \varphi}{dx^2}\right)_0 ,$$

ou encore :

$$\boxed{M_0 + B P - EI \left(\frac{d^2 \varphi}{dx^2}\right)_0 = 0}$$

Pour l'appui de droite, on a :

$$x = l \qquad \frac{dy}{dx} = \omega_1 \qquad M = M_1 \ ,$$

ou :

$$\omega_1 = A\,\alpha \cos \alpha\, l - B\,\alpha \sin \alpha\, l + \frac{M_1 - M_0}{P\,l} + \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_l \ ,$$

là aussi, nous avons la condition :

$$\omega_1 = -\frac{M_1}{k_1} \ ,$$

donc :

$$\boxed{A\,\alpha \cos \alpha\, l - B\,\alpha \sin \alpha\, l + M_1 \left(\frac{1}{P\,l} + \frac{1}{k_1}\right) - \frac{M_0}{P\,l} + \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_l = 0}$$

on a également :

$$M_1 = -A\,P \sin \alpha\, l - B\,P \cos \alpha\, l + E\,I \left(\frac{d^2\varphi}{d^2x}\right)_l$$

ou :

$$\boxed{A\,P \sin \alpha\, l + B\,P \cos \alpha\, l + M_1 - E\,I \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)_l = 0} \ .$$

La barre flambe quand les inconnues deviennent infinies, ce qui a lieu quand le déterminant des inconnues est nul.

La condition de flambement est donc :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & -\left[\frac{1}{P\,l} + \frac{1}{k_0}\right] & \frac{1}{P\,l} \\ 0 & P & 1 & 0 \\ \alpha \cos \alpha\, l & -\alpha \sin \alpha\, l & -\frac{1}{P\,l} & \left[\frac{1}{P\,l} + \frac{1}{k_1}\right] \\ P \sin \alpha\, l & P \cos \alpha\, l & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Tous calculs faits, on trouve :

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta = \frac{2\,\alpha}{l} + \sin \alpha\, l \left[\left(\frac{1}{l} + \frac{P}{k_1}\right)\left(\frac{1}{l} + \frac{P}{k_0}\right) - \frac{1}{l^2} - \alpha^2\right] \\ - \alpha \cos \alpha\, l \left[\left(\frac{1}{l} + \frac{P}{k_0}\right) + \left(\frac{1}{l} + \frac{P}{k_1}\right)\right] = 0 \end{aligned}}$$

Par approximations, on trouve très rapidement la valeur de P qui annule cette expression.

32. — Cas particuliers, formules d'Euler.

L'équation ci-dessus nous permet de retrouver très facilement les formules d'Euler :

1° Cas des deux extrémités articulées; on a alors : $k_1 = k_2 = 0$.

Multiplions l'expression de Δ par $k_1\ k_0$, il vient :

$$\frac{2\,\alpha}{l}\,k_1\,k_0 + \sin\alpha\,l\left[\left(\frac{k_1}{l}+\mathrm{P}\right)\left(\frac{k_0}{l}+\mathrm{P}\right)-\frac{k_1\,k_0}{l^2}-\alpha^2\,k_1\,k_0\right]$$

$$-\,\alpha\cos\alpha\,l\left[\left(\frac{k_1\,k_0}{l}+\mathrm{P}\,k_1\right)+\left(\frac{k_1\,k_0}{l}+\mathrm{P}\,k_0\right)\right]=0\ ,$$

mais, puisque $k_1 = k_0 = 0$, il reste :

$$\sin\alpha\,l\,\mathrm{P}^2 = 0\ ,$$

d'où :

$$\boxed{\alpha\,l = \pi}$$

On retrouve donc bien la formule donnant le flambement d'une barre articulée : $\frac{\pi^2\,\mathrm{E\,I}}{l^2} = \mathrm{P}$.

2° Supposons maintenant un côté encastré et l'autre articulé, par exemple, $k_0 = \infty$ $k_1 = 0$; multiplions l'expression de Δ par k_1 , il vient :

$$\frac{2\,\alpha\,k_1}{l}+\sin\alpha\,l\left[\left(\frac{k_1}{l}+\mathrm{P}\right)\left(\frac{1}{l}+\frac{\mathrm{P}}{k_0}\right)-\frac{k_1}{l^2}-\alpha^2\,k_1\right]$$

$$-\,\alpha\cos\alpha\,l\left[\left(\frac{k_1}{l}+\mathrm{P}\,\frac{k_1}{k_0}\right)+\left(\frac{k_1}{l}+\mathrm{P}\right)\right]=0\ .$$

pour $k_0 = \infty$ et $k_1 = 0$, il reste :

$$\sin\alpha\,l\,\frac{\mathrm{P}}{l}-\alpha\cos\alpha\,l\,\mathrm{P}=0$$

ou :

$$\boxed{\mathrm{tang}\,\alpha\,l = \alpha\,l}$$

On tire de cette équation $\alpha\,l = 1.433\,\pi$, et la valeur critique de la compression est :

$$(1.433)^2\,\pi^2\,\frac{\mathrm{E\,I}}{l^2} = \mathrm{P}$$

ou sensiblement :

$$\frac{2\,\pi^2\,\mathrm{E\,I}}{l^2} = \mathrm{P}\ .$$

3° Cas des deux extrémités encastrées, on a alors $k_1 = k_0 = \infty$: d'où :

$$\frac{2\,\alpha}{l}+\sin\alpha\,l\left[\frac{1}{l^2}-\frac{1}{l^2}-\alpha^2\right]-\alpha\cos\alpha\,l\left[\frac{2}{l}\right]=0$$

où :

$$\frac{2}{l}\,(1-\cos\alpha\,l)-\alpha\sin\alpha\,l=0\ .$$

On reconnaît immédiatement que cette équation est satisfaite pour :

$$\boxed{\alpha\, l = 2\,\pi}$$

On retrouve donc bien la formule $\frac{4\,\pi^2\,EI}{l^2} = P$ relative à une barre soumise à une compression et encastrée aux extrémités.

Qu'il nous soit permis en terminant d'exprimer à M. Kœnigs, membre de l'Institut, et à M. Villey, professeur, notre gratitude pour les conseils et l'aide qu'ils nous ont donné dans la réalisation de ces modestes travaux.

SECONDE THÈSE

Propositions données par la Faculté

RECHERCHES DES TENSIONS PRINCIPALES EN UN POINT SOUMIS A DES EFFORTS NORMAUX ET DES EFFORTS TRANCHANTS

(Formule de Poncelet)

Vu et permis d'imprimer :
Le Recteur de l'Académie de Paris,
S. CHARLÉTY

Vu et approuvé :
Paris, le 4 juin 1929
P. le Doyen de la Faculté des Sciences :
L'Assesseur,
Émile PICARD